

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM
KHOA CÔNG NGHỆ CƠ KHÍ

KS. NGUYỄN THỊ ẨN

Giáo trình

CƠ LÝ THUYẾT

(DÙNG CHO HỆ CAO ĐẲNG)



LƯU HÀNH NỘI BỘ
2009

LỜI NÓI ĐẦU

Cơ lý thuyết là môn khoa học cơ sở quan trọng trong việc đào tạo cán bộ chuyên ngành kỹ thuật trong các trường cao đẳng và đại học. Nó không những cung cấp những kiến thức nền tảng cho các môn kỹ thuật cơ sở và kỹ thuật chuyên ngành mà còn xây dựng khả năng tư duy khoa học cho sinh viên, những cán bộ khoa học kỹ thuật tương lai.

Giáo trình được biên soạn trên cơ sở chương trình đào tạo các Cử nhân cao đẳng chuyên ngành cơ khí của trường Đại học Công nghiệp TP HCM, dùng làm tài liệu giảng dạy và học tập cho sinh viên hệ cao đẳng thuộc các ngành kỹ thuật có liên quan.

Giáo trình này gồm 10 chương:

- Phần Tĩnh học : Chương 1, 2, 3, 4.
- Phần Động học : Chương 5, 6, 7, 8.
- Phần Động lực học : Chương 9, 10.

Trong mỗi chương đều có nhiều ví dụ cho từng vấn đề và cuối chương có bài tập với đáp số kèm theo từ dễ đến k[illegible] để sinh viên dễ dàng học tập và rèn luyện kỹ năng tính toán của [illegible]

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Khoa Cơ khí trường Đại học Công nghiệp TP.HCM và các đồng nghiệp đã động viên và góp ý trong quá trình biên soạn tập bài giảng này.

Giáo trình chắc chắn không tránh khỏi các thiếu sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các bạn đồng nghiệp và độc giả.

Chúng tôi xin chân thành cám ơn.

BỘ MÔN CƠ SỞ THIẾT KẾ MÁY

Lưu hành nội bộ
(Có chỉnh sửa và bổ sung hằng năm)

PHẦN I

TĨNH HỌC

CHƯƠNG 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

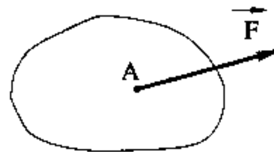
Mục đích:
Trong tĩnh học đối tượng khảo sát là một vật rắn chịu lực và vấn đề cần giải quyết là: *Tìm điều kiện mà hệ lực tác dụng phải thỏa mãn để cho vật cân bằng.*
Nói chung, trước một hệ lực tổng quát nào đó, việc nhìn nhận ngay được điều kiện cân bằng không phải là đơn giản và điều quan trọng là mọi kết luận phải có cơ sở vững chắc; do đó để giải quyết, phương pháp của chúng ta là tiến hành tuần tự, chặc chẽ theo hai bước:

1) Thu hệ lực về một hệ lực đơn giản.
2) Tìm điều kiện cân bằng.

Cân bằng vật rắn có một tầm quan trọng đặc biệt, không những chỉ phục vụ cho Tĩnh học mà còn vận dụng trong suốt giáo trình cơ học.
Để thực hiện các vấn đề đã nêu, chúng ta cần hiểu rõ đối tượng nghiên cứu (lực, vật rắn, vật rắn cân bằng) cũng như những nguyên tắc cần tuân theo. Chương này có mục đích giải quyết các vấn đề đó, nghĩa là đặt cơ sở về lý thuyết cho Tĩnh học.
Yêu cầu:

1) Thấy rõ nội dung và phương pháp nghiên cứu của Tĩnh học. Nắm chắc các tiên đề, hệ quả; tác dụng của chúng.
2) Hiểu sâu bản chất và việc xác định lực. Đặt thành thạo phản lực liên kết trong các trường hợp.

1.1. Các khái niệm cơ bản
1.1.1. Vật rắn tuyệt đối
Vật rắn tuyết đối là vật mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó luôn không đổi dưới tác dụng của lực. Nói một cách khác, nó không bị biến dạng dưới tác dụng của lực.
Trong thực tế không có vật tuyệt đối rắn. Dưới tác dụng của lực lớn, thanh treo phải dãn, dầm ngang phải cong. Nhưng, trong hầu hết các trường hợp, biến dạng thường rất nhỏ, ta có thể bỏ qua để nghiên cứu hiện tượng đơn giản hơn.
Tĩnh học chỉ xét vật rắn tuyệt đối, còn vật biến dạng là đối tượng nghiên cứu của môn sức bền vật liệu.



Hình 1-1

1.1.2. Lực
Lực là đại lượng biểu thị tác dụng cơ học của vật thể này lên vật thể khác.
Thực nghiệm chứng tỏ rằng lực có ba yếu tố:

- Điểm đặt
- Phương, chiều
- Trị số

Để xác định một lực cần biết được 3 yếu tố đó. Nói chung, khi điểm đặt thay đổi thì tác dụng của lực sẽ thay đổi. Phương, chiều của lực biểu thị khuynh hướng chuyển động mà lực gây cho vật. Trị số của lực biểu thị độ lớn của lực so với lực nhận làm đơn vị.

Đơn vị lực thường dùng là Niutơn (N), bội số của Niutơn là KilôNiutơn ($1kN = 10^3N$); MegaNiutơn ($1MN = 10^6N$).

Lực được biểu diễn bằng một véc tơ (Hình 1-1).

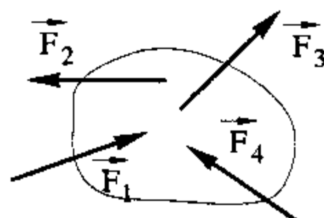
1.1.3. Trạng thái cân bằng

Trạng thái cân bằng là trạng thái mà vật đứng yên đối với hệ qui chiếu đã chọn. Nếu vật đứng yên so với hệ qui chiếu cố định thì cân bằng ấy là tuyệt đối. Còn nếu vật đứng yên so với hệ qui chiếu động thì đó là cân bằng tương đối. Trong tĩnh học chúng ta chỉ xét đến sự cân bằng tuyệt đối, các vật thể đứng yên so với quả đất là cân bằng tuyệt đối.

1.1.4. Một số định nghĩa khác

a) Hệ lực : Là tập hợp của nhiều lực cùng tác dụng lên một vật rắn (Hình 1-2),

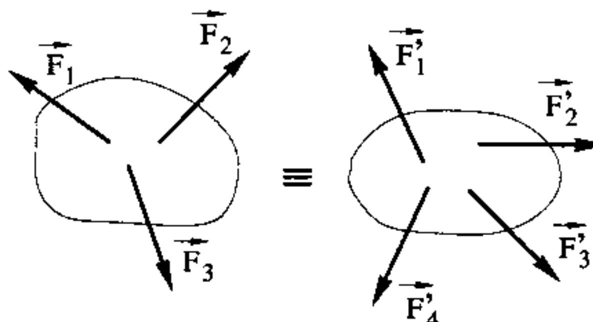
ký hiệu là ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n$).



Hình 1-2

b) Hệ lực tương đương :

Là hai hệ lực có cùng tác dụng cơ học như nhau. Ký hiệu hai hệ lực tương đương là: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \equiv (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \ldots, \vec{F}'_n)$ hay $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n) \sim (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \ldots \vec{F}'_n)$ (Hình 1-3)



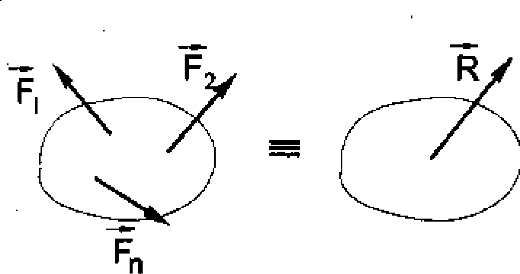
Hình 1-3

c) Hợp lực của hệ lực : Là một lực duy nhất tương đương với cả hệ lực (Hình 1-4)

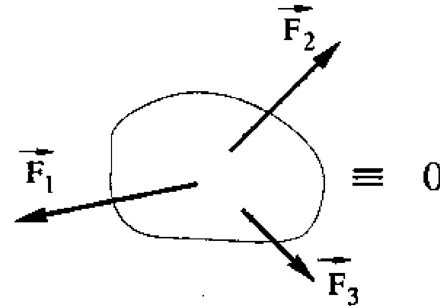
Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n)$ ta có thể viết: $\vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$

d) Hệ lực cân bằng: Là hệ lực có tác dụng làm cho vật rắn cân bằng (Hình 1-5). Ký

hiệu hệ lực cân bằng là $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv 0$ hay $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n) \sim 0$



Hình 1-4



Hình 1-5

e) Mômen của lực đối với một điểm và mômen của lực đối với một trục

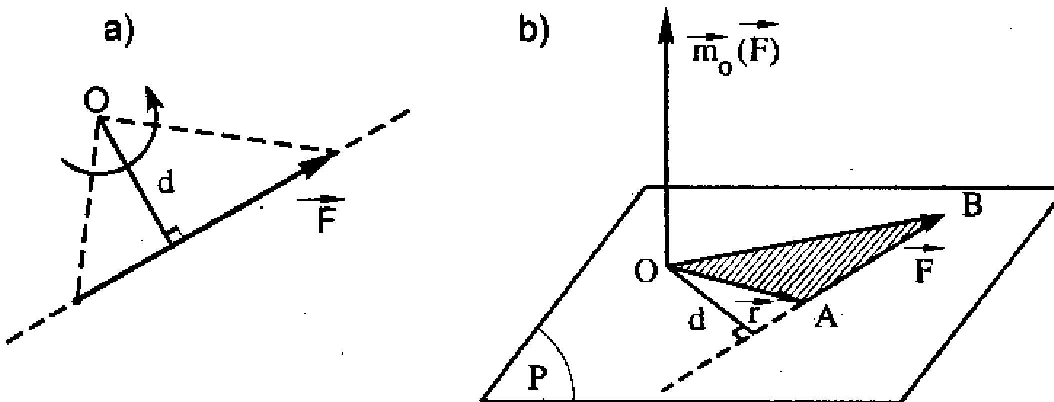
*** Mômen của lực đối với một điểm**

Mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm 0 là một vectơ đặt tại O ký hiệu là $\vec{m}_O(\vec{F})$.

- Có phương vuông góc với mặt phẳng chứa điểm 0 và lực $\vec{F}$
- Có chiều sao cho khi nhìn từ đầu mút của vec tơ thấy lực quay quanh 0 theo chiều ngược kim đồng hồ.
- Có mômen đại số: $\overline{m}_O(\vec{F}) = \pm F.d$ (1-1)

trong đó: d - cánh tay đòn (Hình 1-6 b).

Quy ước mômen được lấy dấu (+) nếu lực $\vec{F}$ quay quanh 0 theo chiều ngược kim đồng hồ và lấy dấu (-) trong trường hợp ngược lại (Hình 1-6 a).



Hình 1-6

*** Mômen của một lực đối với một trục (Hình 1-7)**

Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục z là một vectơ, ký hiệu là $\vec{m}_z(\vec{F})$ là mômen đại số của lực $\vec{F}'$ đối với giao điểm 0, O là giao điểm của mặt phẳng chứa $\vec{F}'$, $\vec{F}' = hc\vec{F}/(P)$.

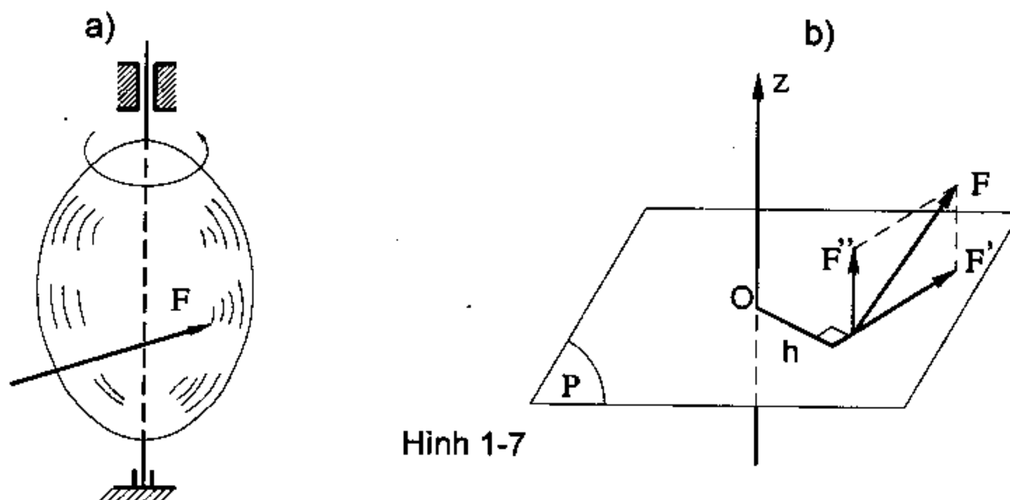
$$\overline{m}_z(\vec{F}) = \pm F'h \qquad (1\text{-}2)$$

$\vec{m}_z(\vec{F})$ hướng lên nếu nhìn từ chiều dương của trục z xuống thấy $\vec{F}'$ quay quanh 0 theo chiều ngược kim đồng hồ và ngược lại.

Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục z bằng 0 trong các trường hợp sau :

* Lực $\vec{F}$ song song với trục z .

* Đường tác dụng của lực $\vec{F}$ cắt trục z.



Hình 1-7

f) Ngẫu lực

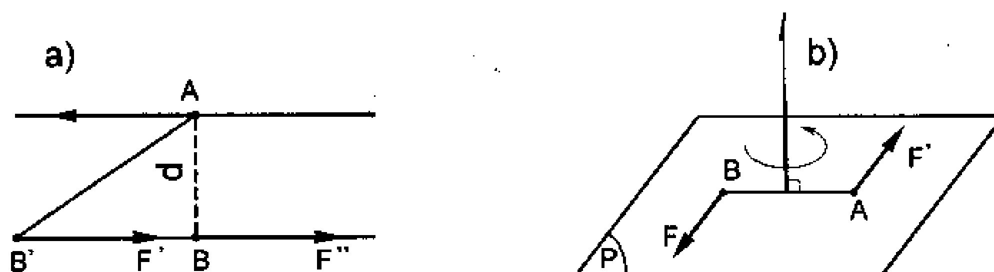
*** Định nghĩa** : Ngẫu lực là một hệ gồm có hai lực song song, ngược chiều nhau và cùng cường độ, kí hiệu $(\vec{F},\vec{F}')$ (Hình 1-8a)

Về phương diện cơ học, ngẫu lực là đại lượng độc lập đối với lực, nó không thể rút gọn hay thay thế bởi một lực; nó có tác dụng làm quay vật thể.

*** Các yếu tố của ngẫu lực :**

+ Mặt phẳng chứa hai lực gọi là mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực (P)
+ Chiều quay của ngẫu lực là chiều thuận theo chiều mũi tên của ngẫu lực, nó biểu thị xu hướng quay của vật khi chịu tác dụng của ngẫu lực.
+ Cường độ của ngẫu được đo bằng đại lượng : $m = F.d$

Với d là khoảng cách giữa 2 lực, còn gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực. Nó biểu thị mức độ tác động làm quay vật của ngẫu lực.



Hình 1-8

Để mô tả 3 đặc tính trên của ngau ực, người ta đưa ra khái niệm véc tơ mômen của ngẫu lực (Hình 1.8 b).

Định nghĩa: Vectơ mômen của ngẫu lực là một vectơ tự do $\vec{m}$ có :

+ Phương vuông góc với mặt phẳng chứa ngẫu lực.
+ Chiều : nhìn từ ngọn xuống thấy chiều quay ngẫu lực ngược chiều quay kim đồng hồ .
+ Mô đun của véc tơ mômen ngẫu lực bằng mômen ngẫu lực

• Chú ý : Nếu các ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng thì mô men của ngẫu lực chỉ cần tính như lượng đại số :

$$\overline{m} = \pm Fd \qquad (1\text{-}3)$$

Lấy dấu (+) khi chiều quay ngẫu lực ngược chiều quay kim đồng hồ và dấu (-) trong trường hợp ngược lại .

*** Tính chất tương đương của ngẫu lực**

Định lý 1 : Hai ngẫu lực có cùng mặt phẳng tác dụng, cùng chiều quay và cùng trị số mô men thì tương đương với nhau

Hệ quả của định lý :

+ Tác dụng của ngẫu lực không thay đổi khi ta thay đổi vị trí của ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng của nó.

+ Tác dụng của ngẫu lực sẽ không thay đổi khi ta thay đổi tùy ý cường độ của lực và cánh tay đòn nhưng vẫn giữ nguyên mô men.

Định lý 2 : Tác dụng của ngẫu lực lên vật rắn sẽ không thay đổi khi ta dời ngẫu lực lên mặt phẳng song song với mặt phẳng tác dụng của nó.

*** Hợp hệ ngẫu lực** : Hệ ngẫu lực bất kỳ trong không gian tương đương với một ngẫu lực có vectơ mô men $\vec{M}$ bằng tổng hình học các vectơ mômen của tất cả các ngẫu lực thành phần :

$$\vec{M} = \sum \vec{m}_k \qquad (1\text{-}4)$$

Nếu hệ ngẫu lực cùng nằm trong mặt phẳng thì cũng tương đương với một ngẫu lực có mômen bằng tổng đại số mômen của tất cả các ngẫu lực thành phần.

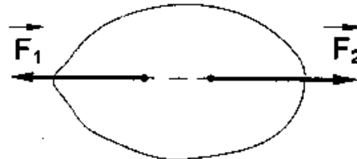
$$\overline{M} = \sum \overline{m}_k \qquad (1\text{-}5)$$

1.2. Hệ tiên đề tĩnh học

1.2.1. Tiên đề 1 (Về hai lực cân bằng)

Điều kiện cần và đủ để vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực đó có cùng đường tác dụng, ngược chiều nhau và cùng cường độ (Hình 1-9).

Ký hiệu : $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv 0$



Hình 1-9

1.2.2. Tiên đề 2 (Về sự tương đương của các hệ lực)

Tác dụng của hệ lực không thay đổi khi ta thêm vào hoặc bớt đi một hệ lực cân bằng.

Hệ quả *:* Tác dụng của lực không thay đổi khi di chuyển điểm đặt lực trên đường tác dụng của nó.

Giả sử có lực $\vec{F}$ đặt lên vật rắn tại điểm A (Hình 1-10).

Hình 1-10

Trên đường tác dụng của $\vec{F}$, tại điểm B, nếu ta đặt hai lực $(\vec{F}', \vec{F}'')$ cân bằng nhau có phương và trị số giống như $\vec{F}$; thì theo tiên đề 2: $\vec{F} \equiv (\vec{F}', \vec{F}, \vec{F}'')$

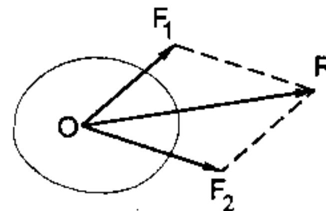
Nhưng theo tiên đề 1 ta cũng có $\vec{F}, \vec{F}''$ cân bằng do đó ta có thể lấy bớt đi, và như vậy :

$$\vec{F} \equiv \vec{F}'$$

Lực $\vec{F}'$ chẳng qua là do lực $\vec{F}$ trượt tới B. Chứng minh xong

1.2.3. Tiên đề 3 (Quy tắc hình bình hành)

Hợp lực của hai lực đặt vào vật rắn có cùng điểm đặt là một lực đặt tại điểm đó và xác định bằng đường chéo hình bình hành lập nên từ các lực đó (Hình 1-11). $\vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$



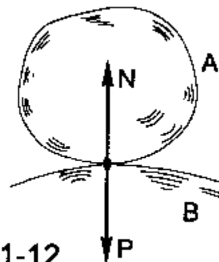
Hình 1-11

1.2.4. Tiên đề 4 (Tác dụng tương hỗ)

Hai vật tác dụng lên nhau những lực có cùng đường tác dụng, bằng nhau về trị số và ngược chiều nhau (Hình 1-12)

Về vectơ : $\vec{P} = -\vec{N}$; về trị số : $P = N$

Hai lực này không cân bằng nhau vì chúng đặt lên hai vật rắn khác nhau



Hình 1-12

1.2.5. Tiên đề 5 (Hoá rắn)

Một vật biến dạng ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực thì khi hóa rắn, vật đó vẫn cân bằng .

Những điều kiện cân bằng của vật rắn
cũng là những điều kiện cần (nhưng không đủ)
của vật biến dạng cân bằng. Giả sử lò xo cân bằng, khi đó lò xo ở trạng thái nén hoặc kéo và hệ lực tác dụng lên lò xo ở trạng thái cân bằng đều thoả mãn tiên đề 1 như vật rắn cân bằng (Hình 1-13).

Tuy nhiên nếu tác dụng lên lò xo nầy hai lực cân bằng ở trạng thái kéo thì lò xo sẽ không cân bằng được mà sẽ bị dãn ra trong khi đó vật tuyệt đối rắn vẫn cân bằng dưới tác dụng của hai lực cân bằng như vậy.

Hình 1-13


1.2.6. Tiên đề 6 (Giải phóng liên kết)

Vật không tự do (vật chịu liên kết) có thể xem là vật tự do khi thay tác dụng của các liên kết bằng các phản lực liên kết tương ứng.

Tiên đề 6 cho phép ta đưa bài toán cân bằng của vật không tự do về bài toán cân bằng của vật tự do dưới tác dụng của các lực hoạt động và phản lực liên kết.

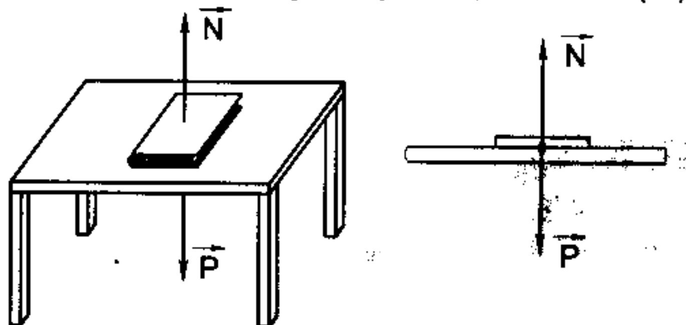
1.3. Liên kết và phản lực liên kết

1.3.1. Khái niệm

a) Liên kết và phản lực liên kết

Thông thường, các vật rắn khảo sát đều ở trạng thái không tự do (chịu liên kết), nghĩa là chuyển động của nó có một hoặc vài phương nào đó bị cản trở.

- Những điều kiện cản trở chuyển động tự do của vật gọi là liên kết. Khi ta xét sự cân bằng của một vật nào đó thì vật ấy được gọi là vật khảo sát. Còn các vật khác liên kết với vật ấy thì được gọi là vật gây liên kết, ví dụ: quyển sách đặt trên mặt bàn thì quyển sách là vật khảo sát, mặt bàn là vật gây liên kết.
- Tại liên kết xuất hiện lực tác dụng tương hỗ. Lực do vật khảo sát tác dụng lên vật gây liên kết gọi là áp lực (trọng lượng $\vec{P}$), còn lực do vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát gọi là phản lực liên kết ($\vec{N}$) (Hình 1-14).

Hình 1-14


b) Tính chất của phản lực liên kết

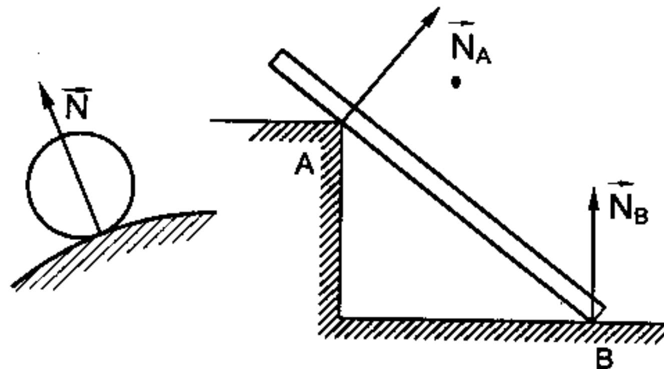
+ Phản lực liên kết bao giờ cũng đặt lên vật khảo sát ở chỗ tiếp xúc với vật gây liên kết.
+ Phản lực liên kết cùng phương và ngược chiều với chuyển động bị cản trở của vật khảo sát.
+ Trị số của phản lực liên kết phụ thuộc vào các lực tác dụng lên vật khảo sát.

1.3.2. Các liên kết thường gặp

a) Liên kết tựa

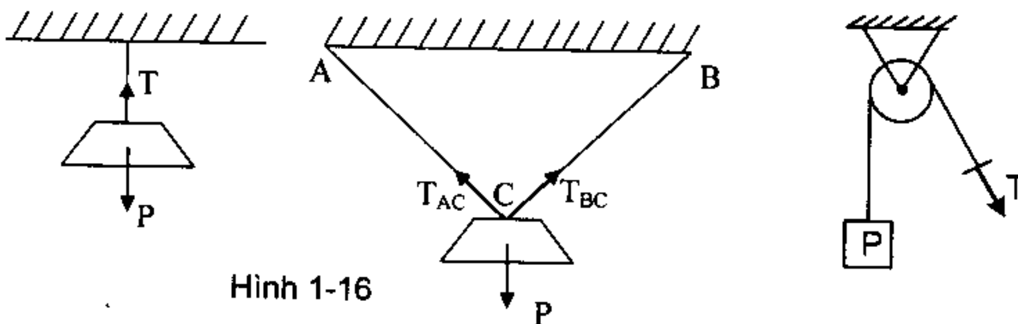
Liên kết tựa là liên kết mà các vật chỉ có tác dụng đỡ lấy nhau. Phản lực là một lực hướng theo pháp tuyến của mặt tiếp xúc chung của liên kết, ký hiệu là $\vec{N}$, chỉ có một yếu tố chưa biết là trị số của nó (Hình 1-15)

Hình 1-15



b) Liên kết dây mềm

Dây mềm không giãn, bị kéo căng. Phản lực gọi là sức căng dây, có phương dọc theo dây, chiều đi ra khỏi vật liên kết, ký hiệu là $\vec{T}$ (H 1-16).



Hình 1-16

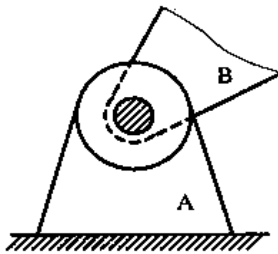
c) Liên kết bản lề

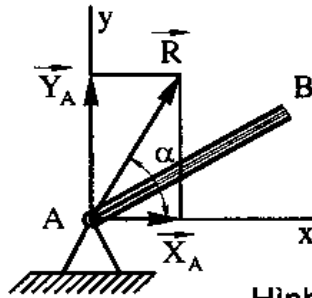
Là liên kết chỉ cho phép vật quay quanh một điểm hoặc một trục cố định. Có các dạng sau:

Bản lề cố định :

Phản lực là một lực đặt ở tâm bản lề nhưng chưa biết phương chiều và trị số, ký hiệu là $\vec{R}$. Để thuận tiện, trong tính toán $\vec{R}$ được phân thành

hai thành phần $\vec{X}$ và $\vec{Y}$ vuông góc với nhau ứng với bài toán phẳng cho phép vật quay quanh trục Oz vuông góc (H1-17).



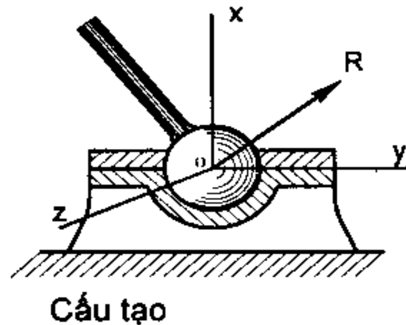


Hình 1-17 Hình 1-18

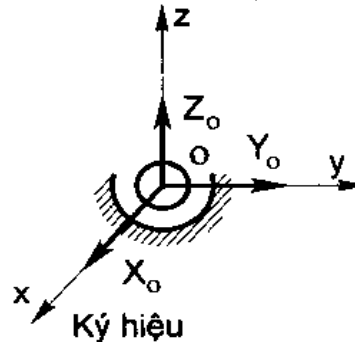
Bản lề di động :
Đối với loại gối đỡ này vật tựa vừa có thể quay quanh trục bản lề, vừa có thể di chuyển song song với mặt phẳng tựa. Phản lực là một lực hướng theo pháp tuyến của mặt tựa và đi qua tâm của bản lề, ký hiệu là $\vec{N}$ (Hình 1-18).

Bản lề cầu :
Liên kết cho vật quay quanh điểm O trong không gian phản lực liên kết là $\vec{R}$ đặt tại O gồm 3 thành phần chưa biết vuông góc với nhau $\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{Z}_O$ (Hình1-19).

Hình 1-19



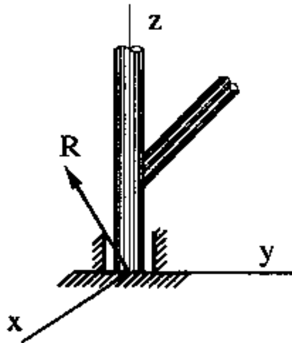
Cấu tạo



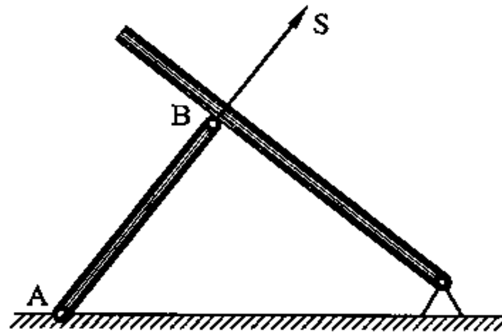
Ký hiệu

Bản lề cối:
Liên kết cho vật quay quanh trục cố định Oz. Phản lực liên kết $\vec{R}$ đặt tại O gồm 3 thành phần chưa biết vuông góc nhau $\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{Z}_O$ (Hình 1-20)

d) Liên kết thanh
Thanh là vật rắn hình dáng bất kỳ không có lực nào tác dụng lên kể cả trọng lực,nó liên kết giữa vật khảo sát với phần cố định tại hai điểm. Phản lực liên kết hướng theo đường nối hai điểm liên kết, chiều giả định, nó còn được gọi là ứng lực của thanh (Hình 1-21).



Hình 1-20



Hình 1-21

e) Liên kết ngàm

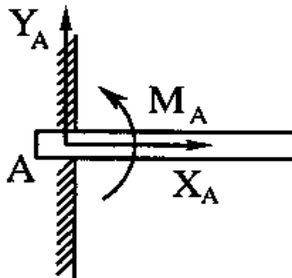
Khi vật bị liên kết và vật gây liên kết được nối cứng với nhau tại A thì đó là liên kết ngàm. Phản lực là một lực $\vec{R}_A$ và một ngẫu lực có mômen $\vec{M}_A$

Nếu là ngàm trong không gian thì $\vec{R}_A$ được xác định bởi ba thành phần $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ theo ba trục tọa độ, còn $\vec{M}_A$ cũng được xác định bởi $\overline{M}_X$, $\overline{M}_Y$, $\overline{M}_Z$ theo ba trục tọa độ.

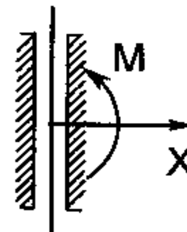
Nếu ngàm trong mặt phẳng thì $\vec{R}_A$ được xác định bởi hai thành phần $\vec{X}_A$ và $\vec{Z}_A$ theo hai trục trong mặt phẳng, còn $\overline{M}_A$ được xác định trong mặt phẳng ngàm (Hình 1-22).

f) Liên kết ổ trục dài

Ngăn di chuyển thẳng góc với trục và di chuyển quay. Có một phản lực như tựa và một ngẫu phản lực như ngàm (Hình 1-23).



Hình 1-22



Hình 1-23

CHƯƠNG 2
CÂN BẰNG HỆ LỰC

Yêu cầu: 1 - Nhận dạng loại hệ lực đang nghiên cứu. Nắm vững điều kiện cân bằng, viết các phương trình cân bằng cho một hệ lực cân bằng.

2 - Nắm được trình tự phân tích để giải một bài toán tĩnh học.

2.1. Véc tơ chính và Véc tơ mô men chính của hệ lực không gian

2.1.1. Véc tơ chính của hệ lực không gian.

a) Định nghĩa: Véc tơ chính của hệ lực, kí hiệu $\vec{R}'$, là véc tơ tổng của các véc tơ lực của hệ lực :

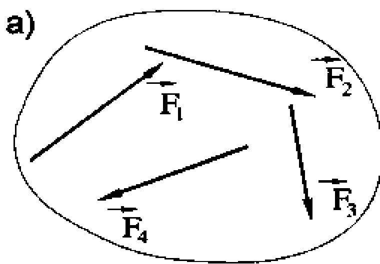
$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots.. + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (2\text{-}1)$$

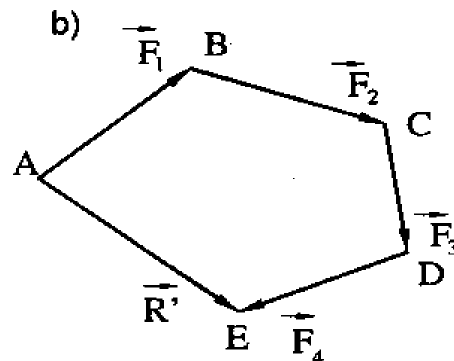
b) Phương pháp xác định véc tơ chính.

*** Phương pháp hình học :**

Xét hệ có bốn lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ (Hình 2-1a).Từ một điểm A bất kỳ, ta vẽ nối tiếp lần lượt các véc tơ tương ứng song song cùng chiều với các véc tơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ và có độ dài chính bằng độ dài của các véc tơ này. Đường gấp khúc ABCDEA được tạo

thành gọi là đa giác lực của hệ lực đã cho (Hình 2.1b). Véc tơ $\overrightarrow{AE}$ đóng kín đa giác lực là véc tơ chính $\vec{R}'$ của hệ lực đã cho. Nếu hệ lực trong không gian thì đa giác lực sẽ là đa giác ghềnh. Hệ lực phẳng thì đa giác lực sẽ là đa giác phẳng.





Hình 2-1

*** Phương pháp giải tích**

$$R'_X = \sum F_{kx}; R'_Y = \sum F_{ky}; R'_Z = \sum F_{kz}$$

$$R' = \sqrt{R'^2_X + R'^2_Y + R'^2_Z} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2} \qquad (2\text{-}2)$$

Gọi α, β, γ là góc mà $\vec{R}'$ tạo với các trục Ox, Oy, Oz, thì cosin của các góc này được xác định như sau :

$$\cos\alpha = \frac{R'_X}{R'}\ ;\quad \cos\beta = \frac{R'_Y}{R'}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{R'_Z}{R'} \qquad (2\text{-}3)$$

2.1.2. Mômen chính của hệ lực không gian đối với một tâm

a) Định nghĩa : Véctơ mômen chính của hệ lực không gian đối với điểm O, kí hiệu $\vec{M}_O$, là một véc tơ bằng tổng hình học các véctơ mômen của các lực đối với O :

$$\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + ... + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (2\text{-}4)$$

b) Phương pháp xác định : Véctơ mômen chính được xác định bằng phương pháp giải tích:

$$M_{Ox} = \sum m_x(\vec{F}_k);\ M_{Oy} = \sum m_y(\vec{F}_k);\ M_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_k)$$

$$M_O = \sqrt{[\sum m_x(\vec{F}_k)]^2 + [\sum m_y(\vec{F}_k)]^2 + [\sum m_z(\vec{F}_k)]^2} \qquad (2\text{-}5)$$

Gọi α, β, γ là góc mà $\vec{M}_O$ tạo với Ox, Oy, Oz, ta có :

$$\cos\alpha = \frac{M_{OX}}{M_O}\ ;\quad \cos\beta = \frac{M_{OY}}{M_O}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{M_{OZ}}{M_O} \qquad (2\text{-}6)$$

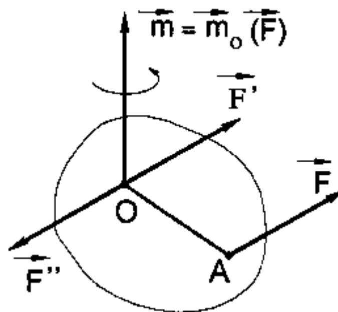
2.2. Thu gọn hệ lực không gian

2.2.1. Thu gọn hệ lực không gian về tâm O

a) Định lý dời lực song song

Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với lực $\vec{F}'$ song song cùng chiều cùng cường độ với lực $\vec{F}$ nhưng đặt tại O và một ngẫu lực có mômen bằng mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O (Hình2.2).

$$\vec{F} \equiv (\vec{F}',\ \text{và ngẫu lực}\ \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F})) \qquad (2\text{-}7)$$



Hình 2-2

b) Thu gọn hệ lực không gian về một tâm

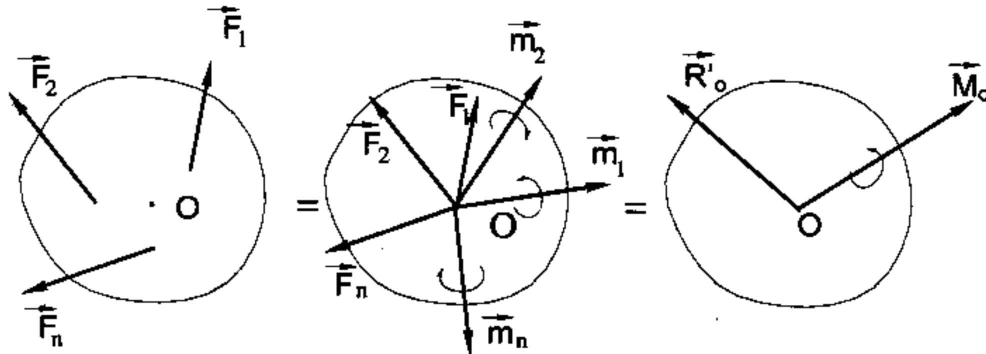
Lấy một điểm O tùy ý, gọi là tâm thu gọn. Sử dụng định lý dời lực song song để dời các lực về tâm O (Hình 2-3)

$\vec{F}_1 \equiv \vec{F}_1'$ và $\vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$

$\vec{F}_2 \equiv \vec{F}_2'$ và $\vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)$

....

$\vec{F}_n \equiv \vec{F}_n'$ và $\vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)$



Hình 2-3

Như vậy thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ về tâm O ta được một hệ lực đồng qui không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ và một hệ ngẫu lực không gian $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n)$. Hệ lực đồng qui có hợp lực qua O, kí hiệu $\vec{R}_O'$, được biểu diễn bằng véc tơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O $\vec{R}_O' = \sum \vec{F}_k$ và một ngẫu lực $\vec{M} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$

- *Định lý : Hệ lực không gian rút gọn về một tâm O sẽ tương đương với một lực biểu thị bằng véctơ chính và một ngẫu lực có véctơ mômen biểu thị bằng véctơ mômen chính của hệ lực đối với tâm O.*

2.2.2. Dạng tối giản của hệ lực không gian

a) $\vec{R}' = 0$; $\vec{M}_O = 0$: hệ lực không gian cân bằng.

b) $\vec{R}' = 0$; $\vec{M}_O \neq 0$: hệ lực không gian tương đương với một ngẫu lực.

c) $\vec{R}' \neq 0$; $\vec{M}_O = 0$: hệ lực không gian tương đương với một lực.

d) $\vec{R}' \neq 0$; $\vec{M}_O \neq 0$: hệ lực không gian tương đương với một hệ xoắn.

Định lý Varinhông

Nếu hệ lực có hợp lực thì véctơ mômen của hợp lực đối với một điểm nào đó bằng tổng hình học các véctơ mômen các lực của hệ đối với điểm ấy.

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (2\text{-}8)$$

2.3. Điều kiện cân bằng và các phương trình cân bằng của hệ lự không gian

2.3.1 Điều kiện cân bằng của hệ lực không gian

Định lý : Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là véct chính, và véctơ mômen chính của hệ lực đối với một điểm 0 nào đ bằng 0.

$$\vec{R}' = 0;\ \vec{M}_O = 0$$

2.3.2. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum F_{kz} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum m_X(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum m_Y(\vec{F}_k) = 0 \\ \sum m_Z(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}9)$$

2.3.3. Điều kiện cân bằng và các phương trình cân bằng của các hệ lực khác

a) Hệ lực đồng qui

Định lý : Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian đồng qui cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên ba trục tọa độ đều bằng không.

$$\sum F_{kx} = 0\ ;\quad \sum F_{ky} = 0\ ;\quad \sum F_{kz} = 0 \qquad (2\text{-}10)$$

b) Hệ lực song song

Định lý : Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian song song cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên trục song song với chúng và tổng mô men các lực đối với hai trục còn lại đều bằng không

Nếu hệ lực song song với trục z, thì :

$$\sum F_{kz} = 0\ ;\quad \sum m_X(\vec{F}_k) = 0\ ;\quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0 \qquad (2\text{-}11)$$

c) Hệ lực phẳng

Dạng thứ nhất :

Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng hình chiếu của các lực lên hai trục tọa độ và tổng mô men của chúng đối với một điểm bất kỳ trong mặt phẳng bằng không.

$$\sum F_{kx} = 0\ ;\quad \sum F_{ky} = 0\ ;\quad \sum m_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (2\text{-}12)$$

Dạng thứ hai :

Điều kiện cần và đủ để cho hệ lực phẳng cân bằng là tổng mô men của các lực đối với hai điểm A, B bất kỳ và tổng hình chiếu của chúng lên trục x không vuông góc với AB bằng không.

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0\ ;\quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0\ ;\quad \sum F_{kx} = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

Dạng thứ ba :

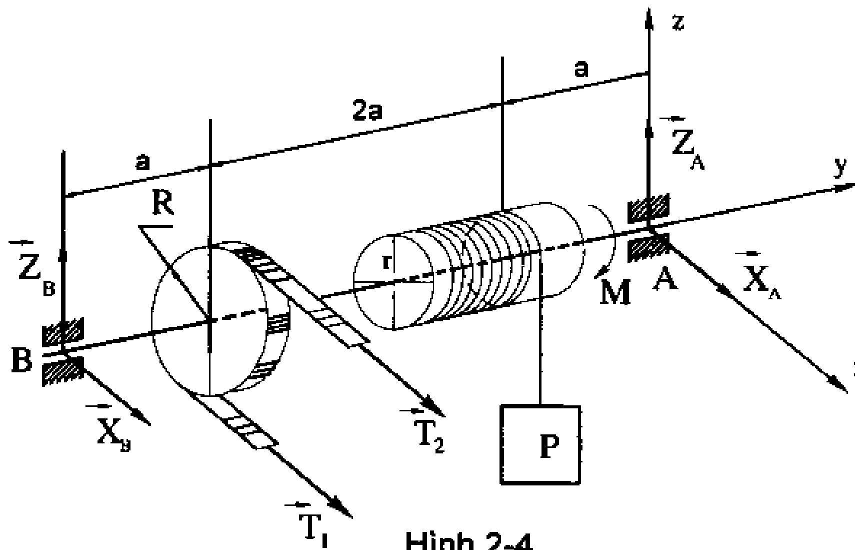
Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mô men của tất cả các lực đối với ba điểm A, B, C bất kỳ không thẳng hàng đều bằng không.

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = O \quad ; \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = O \quad ; \quad \sum m_C(\vec{F}_k) = O \qquad (2\text{-}14)$$

Ví dụ 2-1:

Một trục kéo AB có đường trục nằm ngang và được đỡ trên hai ổ trục (bản lề trụ) A và B. Hai nhánh đai của pu li có đường kính D = 0,6m chịu các lực căng T_1 = 5 kN và T_2 = 2 kN, tang tời có đường kính d = 0,3m. Trục tời chịu tác dụng ngẫu lực cản có mômen M (Hình 2-4).

Xác định ngẫu lực cản M cần thiết để trục cân bằng và các phản lực tại các gối trục A và B. Bỏ qua ma sát, các kích thước cho như trên hình.



Hình 2-4

Giải :

Trục kéo cân bằng : $(\vec{P},\vec{M},\vec{T}_1,\vec{T}_2,\vec{X}_A,\vec{Z}_A,\vec{X}_B,\vec{Z}_B) \equiv O$

Các phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kX} = T_1 + T_2 + X_A + X_B = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{kZ} = -P + Z_A + Z_B = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \overline{m}_X(\vec{F}_k) = aP - 4aZ_B = 0 \qquad (3)$$

$$\sum \overline{m}_Y(\vec{F}_k) = -T_1\frac{D}{2} + T_2\frac{D}{2} + P\frac{d}{2} + M = 0 \qquad (4)$$

$$\sum \overline{m}_Z(\vec{F}_k) = 3aT_1 + 3aT_2 + 4aX_B = 0 \qquad (5)$$

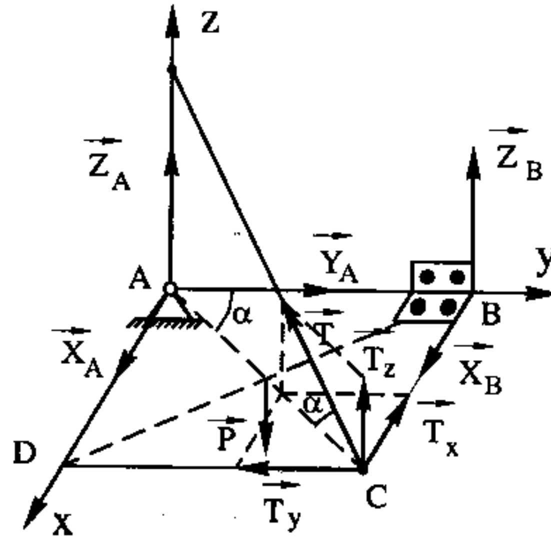
Thay các gía trị bằng số vào hệ phương trình trên và giải ta được:

X_A = - 1,75 kN; Z_A = 3,75 kN; X_B = - 5,25 kN; Z_B = 1,25 kN; M = 0,15 kN

Ở đây các thành phần $\vec{X}_A$ và $\vec{X}_B$ có chiều ngược với chiều đã chọn.

Ví dụ 2-2 :
Tấm chữ nhật đồng chất ABCD trọng lượng P được giữ trong mặt phẳng nằm ngang bởi bản lề cầu ở A, bản lề trụ B và dây CE, $\alpha = 30^0$. Tìm sức căng sợi dây và phản lực tại các bản lề (Hình 2-5).

Hình 2.5



Giải :
Xét cân bằng của tấm ABCD, giải phóng nó khỏi liên kết bản lề cầu thay bởi 3 thành phần phản lực $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ và liên kết bản lề trụ bởi 2 thành phần phản lực $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$ cùng liên kết dây bởi sức căng $\vec{T}$, ta được hệ lực cân bằng :

$(\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}) \equiv O$

Chọn hệ trục như hình vẽ, đặt AB = 2a.

Để thuận lợi cho việc tính toán ta phân tích $\vec{T}$ thành 3 thành phần theo 3 trục tọa độ :

$$T_X = T\cos\alpha\sin\alpha = T\frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$T_Y = T\cos\alpha\cos\alpha = T\frac{3}{4}$$

$$T_Z = T\sin\alpha = \frac{T}{2}$$

Các phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B - T_X = O$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - T_Y = O$$

$$\sum F_{kz} = Z_A - P + T_Z + Z_B = O$$

$$\sum m_X(\vec{F}_k) = -aP + 2aZ_B + 2aT_Z = O$$

$$\sum m_Y(\vec{F}_k) = P\frac{a}{\sqrt{3}} - T_Z\frac{2a}{\sqrt{3}} = O$$

$$\sum m_Z(\vec{F}_k) = -X_B.2a - T_y\frac{2a}{\sqrt{3}} + T_x.2a = O$$

Giải hệ phương trình ta được :

$$X_A = P\frac{\sqrt{3}}{4}; Y_A = P\frac{3}{4}; Z_A = \frac{P}{2}; X_B = O; Z_B = O; T = P$$

Vì các giá trị này đều dương, nên chiều của các phản lực thực tế đúng như trên hình vẽ.

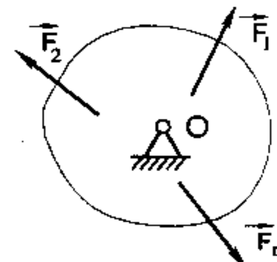
2.4. Các bài toán đặc biệt

2.4.1. Bài toán cân bằng đòn phẳng

Đòn phẳng là vật rắn, có thể quay quanh trục cố định, chịu tác dụng của hệ lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay (Hình 2-6)

Vì đòn chỉ có thể quay quanh trục O nên điều kiện để đòn đứng yên là :

$$\sum \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (2\text{-}15)$$



Hình 2-6

2.4.2. Bài toán cân bằng của vật lật

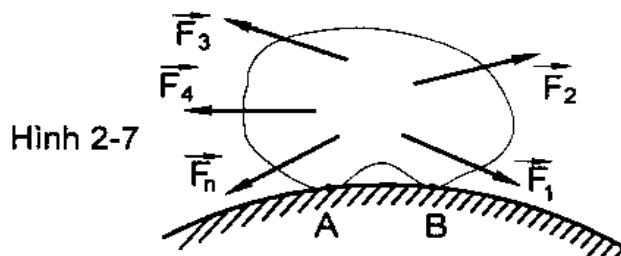
Vật rắn tựa trên bề mặt tại 2 điểm A; B chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ vật có thể lật quanh điểm A hoặc B (Hình 2-7). Các lực tác dụng lên vật được phân thành 2 loại :

* Lực lật : Là các lực gây ra mômen làm lật vật quanh điểm đó. Tổng mômen của các lực lật gọi là mômen lật kí hiệu $M_{lật}$

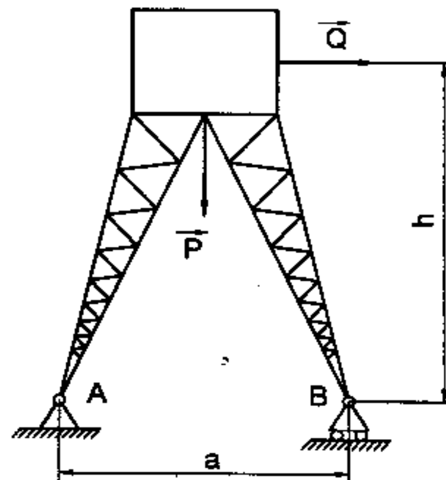
* Lực giữ : Là các lực gây ra mômen cản trở lại việc lật vật quanh điểm đó. Tổng mômen của các lực giữ gọi là mômen giữ kí hiệu $M_{giữ}$.

Điều kiện để vật không bị lật quanh 1 điểm nào đó là :

$$M_{giữ} \geq M_{lật} \qquad (2\text{-}16)$$



Hình 2-7



Hình 2-8

Ví dụ 2-3:

Bể nước trong lượng P được đặt trên tháp 2 chân. Cho A là gối cố định, B là gối di động. Ở độ cao h có lực gió nằm ngang $\vec{Q}$. Tìm khoảng cách a = AB để tháp khỏi bị lật. (Hình 2-8).

Giải :

Tháp có thể bị lật quanh A. Đối với điểm A ta có lực lật là $\vec{Q}$ và lực giữ là $\vec{P}$

Để tháp không bị lật thì :

$$P\frac{a}{2} \geq Qh \quad \text{hay là :} \quad a \geq \frac{2Qh}{P}$$

2.4.3. Bài toán về lực phân bố

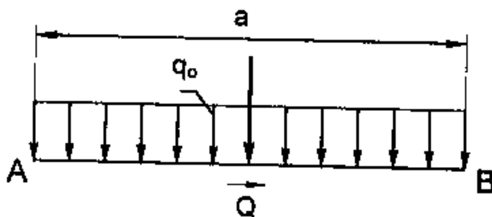
Trong kỹ thuật ta còn thường gặp trường hợp dầm thẳng chịu tác dụng của hệ lực song song phân bố đều và phân bố không đều dọc theo chiều dài dầm.

a) Tải trọng phân bố đều (Hình 2-9) .

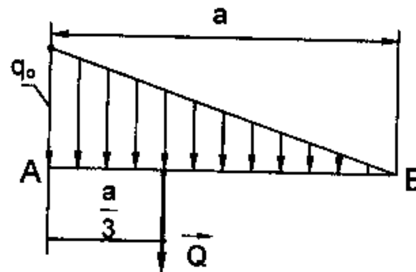
Gọi q là cường độ của tải trọng phân bố (hợp lực của tải trọng trên một đơn vị chiều dài). Hệ lực phân bố này được thay thế bằng lực tập trung $\vec{Q}$ đặt tại điểm giữa đoạn chịu phân bố đều, có trị số là : $Q = q_o.a$

b) Tải trọng phân bố không đều (Hình 2-10) .

Hệ lực được thay thế bằng lực $\vec{Q}$ có trị số là $Q = \frac{1}{2}q_o.a$, và đặt cách đầu có q_o là $\frac{1}{3}a$, trong đó a là chiều dài của đoạn chịu lực phân bố.



Hình 2-9



Hình 2-10

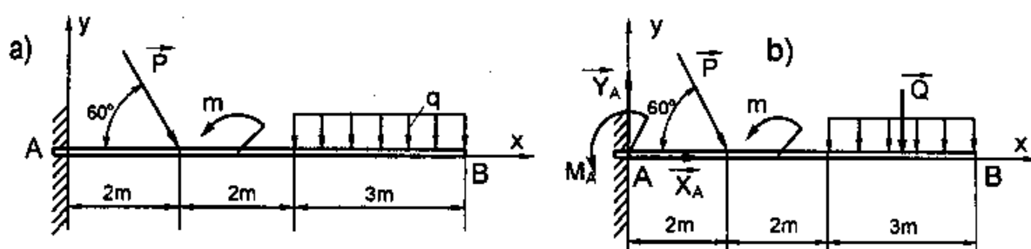
Ví dụ 2-4:

Một dầm côngxon chịu tác dụng lực như hình 2-11. Biết P = 8 N; $\alpha = 60^o$; m = 16 Nm ; q_o = 2 N/m. Hãy xác định phản lực tại ngàm A ?

Giải :

Xét dầm cân bằng AB : $(\overline{m}, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \overline{M}_A) \equiv O$

trong đó $Q = 3.q_o = 6$ N



Hình 2-11

Các phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kx} = X_A + P\cos 60^\circ = O \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - P\sin 60^\circ - Q = O \quad (2)$$

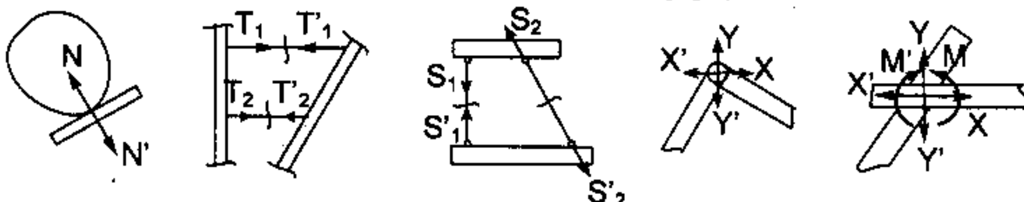
$$\sum \overline{m}_A(\vec{F}_k) = M_A + m - P.2\sin 60^\circ - Q.5{,}5 = O \quad (3)$$

Giải 3 phương trình chúng ta được :

M_A = 30,856 Nm ; Y_A = 12,928 N ; X_A = - 4 N

2.4.4. Bài toán hệ vật

Nội lực các liên kết thường gặp



L/kết tựa L/kết dây L/kết thanh L/kết bản lề L/kết ngàm

Hệ gồm nhiều vật liên kết với nhau cùng cân bằng. Lực liên kết giữa các vật thuộc hệ là nội lực trong hệ. Do đó khi tách vật tại liên kết nào đó, chúng ta phải đặt tại liên kết đó những cặp lực có cùng đường tác dụng, cùng trị số, ngược chiều và đặt trên hai vật khác nhau.

Có hai cách giải bài toán hệ vật

- Hoá rắn : Xem toàn bộ hệ vật như một vật, hệ chỉ chịu tác dụng của ngoại lực. Giải bài toán này như đối với một vật.
- Tách vật : Khảo sát sự cân bằng của từng vật riêng biệt. Đặt các lực tác dụng trực tiếp lên vật (cả ngoại lực và nội lực). Với mỗi vật được giải như bài toán một vật.

Trong thực tế người ta kết hợp hai phương pháp hóa rắn và tách vật để giải bài toán hệ vật.

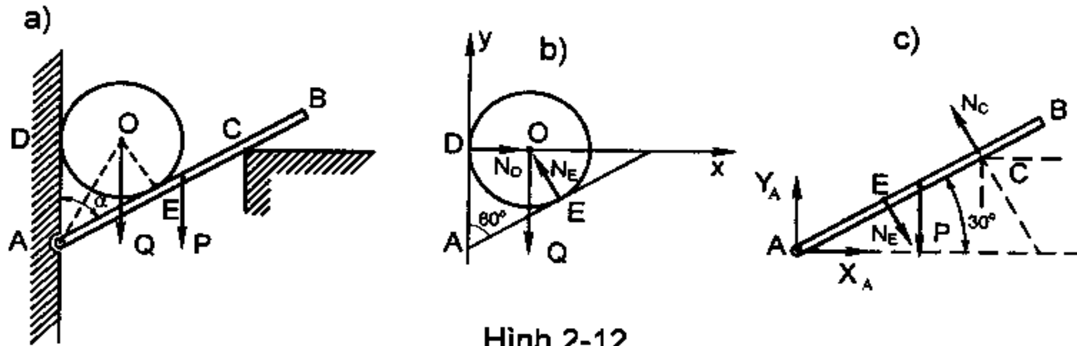
Ví dụ 2-5 :

Một ống trụ bán kính R = 0,5m trọng lượng Q = 173 N dựa vào tường và thanh AB (Hình 2-12a). Thanh AB dài l = 2m, trọng lượng P = 100 N; gắn vào tường bằng bản lề A và dựa lên mép một tường khác tại C;

CB = 0,5m. Tìm phản lực tại D, A, C và lực ép của ống trụ lên thanh tại E. Cho $\alpha = 60^0$.

Giải :

Ta lần lượt khảo sát từng vật một.



Hình 2-12

♦ Xét ống trụ: cân bằng dưới tác dụng của hệ lực $(\vec{Q},\vec{N}_D,\vec{N}_E) \equiv 0$ (Hình 2-12b)

Các phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kx} = N_D - N_E \cos 60^O = O \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = -Q + N_E \sin 60^O = O \qquad (2)$$

Chúng ta giải được:

$$N_E = \frac{Q}{\sin 60^O} = 200N; \quad N_D = N_E \cos 60^O = 100N$$

♦ Xét thanh AB cân bằng dưới tác dụng của hệ lực $(\vec{P},\vec{N}'_E,\vec{N}_C,\vec{X}_A,\vec{Y}_A) \equiv 0$ (Hình 2-12c)

Trong đó: $N'_E = N_E = 200N$; $AE = R\cot g30^O = R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}m$

Các phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kx} = N'_E \cos 60^O - N_C \cos 60^O + X_A = O \qquad (3)$$

$$\sum F_{ky} = -P - N_E \sin 60^O + N_C \sin 60^O + Y_A = O \qquad (4)$$

$$\sum \overline{m}_A = -\frac{AB}{2}\sin 60^O.P - AE.N'_E + AC.N_C = O \qquad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) chúng ta tính được:

$$N_C = 100\sqrt{3} = 173N$$

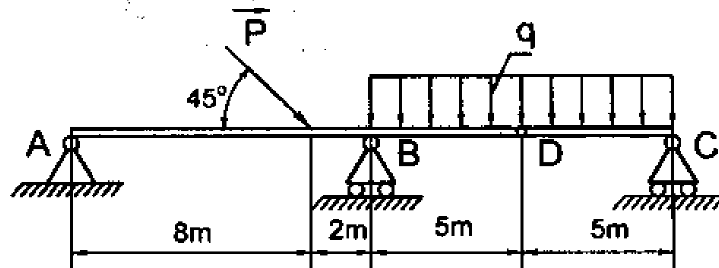
$$X_A = (N_C - N_E)\cos 60^O \approx -13{,}5N$$

$$Y_A = P + (N_E - N_C)\sin 60^O \approx 123N$$

Ví dụ 2-6:

Cho hệ dầm chịu lực như hình 2-13, hãy xác định phản lực tại A, B, C và D.

Hình 2-13



Giải:

Hóa rắn và xét cân bằng toàn hệ (Hình 2-14a):

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{P}, \vec{Y}_B, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Y}_C) \equiv O$$

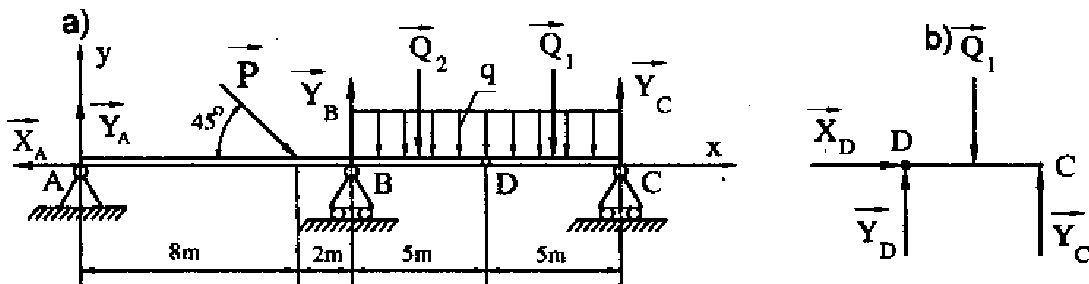
$Q_1 = Q_2 = 5.2 = 10$ kN

Các phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kx} = P\cos 45^O - X_A = O \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B + Y_C - Q_2 - Q_1 - P\sin 45^O = O \quad (2)$$

$$\sum \overline{m}_A = 10Y_B + 20Y_C - 8PSin45^O - 12{,}5Q_2 - 17{,}5Q_1 = O \quad (3)$$



Hình 2-14

* Tách vật, xét cân bằng thanh CD: $(\vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{Q}_1, \vec{Y}_C) \equiv O$ (Hình 2-14b)

Các phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = X_D = O \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = Y_C + Y_D - Q_1 = O \quad (5)$$

$$\sum \overline{m}_D(\vec{F}) = 5Y_C - 2{,}5Q_1 = O \quad (6)$$

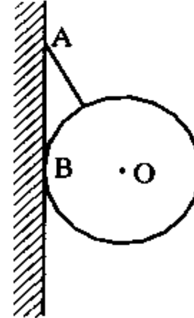
Giải 6 phương trình trên ta được:

$X_D = 0$; $Y_D = 5$ kN; $Y_C = 5$ kN; $X_A = 2{,}8$ kN; $Y_A = -4{,}4$ kN; $Y_B = 22{,}26$ kN.

2.5. Bài tập chương 2

2.1. Quả cầu đồng chất tâm O, trọng lượng P, tựa vào tường ở C và được treo bởi dây AB dài bằng bán kính. Tìm sức căng và phản lực của tường (Hình 2-15)

ĐS: $T = \dfrac{2P\sqrt{3}}{3}$; $N = \dfrac{P\sqrt{3}}{3}$



Hình 2-15

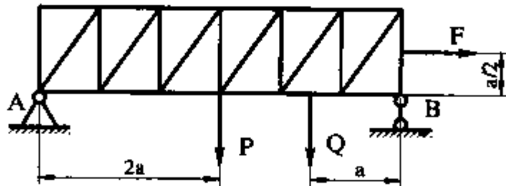
2.2. Dầm AB chịu lực như hình 2-16a,b. Hãy xác định phản lực tại c gối A và B trong hai trường hợp.

Cho biết P = 100 kN ; Q = 50 kN; F = 25 kN ; a = 2m

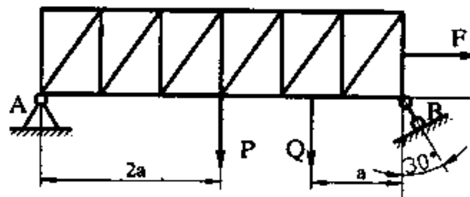
ĐS: a) $X_A = -25kN$; $Y_A = 59,375\ kN$; $N_B = 90,625\ kN$

b) $X_A = 27,32\ kN$; $Y_A = 59,37\ kN$; $N_B = 104,65\ kN$

a)



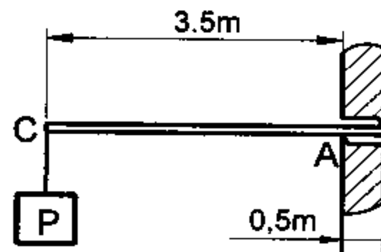
b)



Hình 2-16

2.3. Dầm đồng chất dài 4m, trọng lượng 5kN, được chôn thẳng góc vào bức tường dày 0,5m. Dầm làm việc ở chế độ tựa lên hai cạnh tường A, B. Xác định các phản lực tại A và B nếu đầu C treo vật nặng P = 40kN (Hình 2-17).

ĐS: $N_A = 340kN$; $N_B = 295kN$.



Hình 2-17

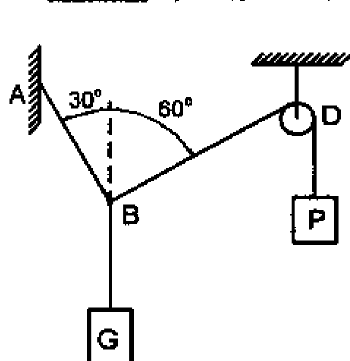
2.4. Dây AB có một đầu buộc vào điểm A, đầu B treo vật có trọng lượı G và được nối vào đoạn dây BDC vắt qua ròng rọc D treo vào C v nặng P = 100N. Bỏ qua ma sát ở ròng rọc. Hãy xác định sức căı của dây AB và trọng lượng G của vật (Hình 2-18).

ĐS: $T_A = 173,2\ N$; $G = 200N$

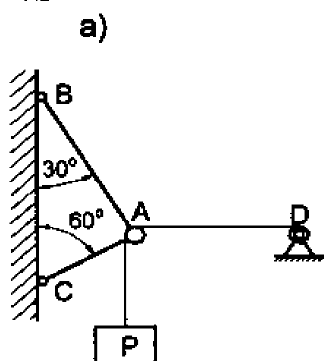
2.5. Dây treo vật có trọng lượng P = 20kN được vắt qua ròng rọc A và giữ bởi tời D. Ròng rọc A có bán kính không đáng kể. Xác định phản lực của các thanh AB và AC ở hình 2-19a,b; bỏ qua ma sát của ròng rọc, trọng lượng các thanh và dây không đáng kể.

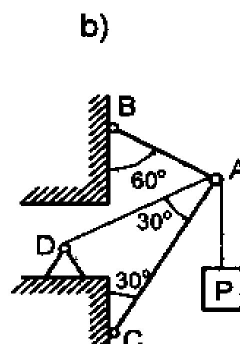
ĐS: a) $S_{AC} = 7,32\ kN$; $S_{AB} = 27,32\ kN$;

b) $S_{AC} = 34,6\ kN$; $S_{AB} = 0$



Hình 2-18





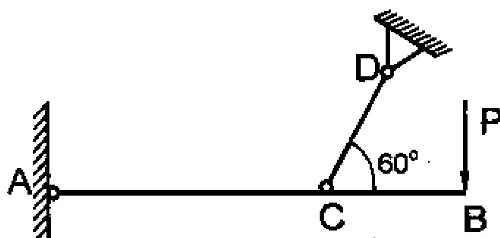
Hình 2-19

2.6. Thanh AB mắc vào tường nhờ bản lề A và được giữ nằm ngang nhờ thanh CD, thanh CD có hai đầu là bản lề nối vào thanh AB và trần. Góc nghiêng giữa hai thanh là 60^0, trọng lượng hai thanh đều không đáng kể. Cho AC = 2m , CB = 1m. Tìm phản lực tại bản lề A và C khi đầu B chịu lực thẳng đứng P = 10kN. (Hình 2-20)

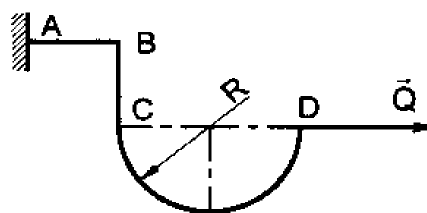
<u>ĐS</u>: $X_A = 10\frac{\sqrt{3}}{2}kN$; $Y_A = 5kN$; $S_C = 10\sqrt{3}kN$

2.7. Lực kéo Q đặt vào đầu D của móc ABCD, ngàm tại A, AB = BC = R. Tìm phản lực liên kết tại ngàm A. R là bán kính cong của móc (Hình 2-21).

ĐS: $X_A = -Q$; $Y_A = 0$; $M_A = -QR$



Hình 2-20



Hình 2-21

2.8. Dầm đồng chất AB dài 2m, trọng lượng P = 50N, tựa vào tường thẳng đứng tại A . Tại B buộc sợi dây BC (Hình 2-22).

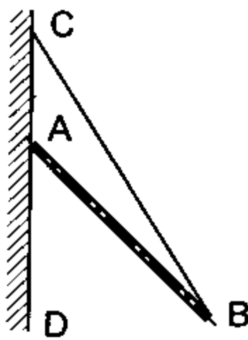
a) Tìm khoảng cách AC để dầm cân bằng và hợp với tường một góc BAD = 45^0.

b) Tìm sức căng của dây và phản lực của tường ?

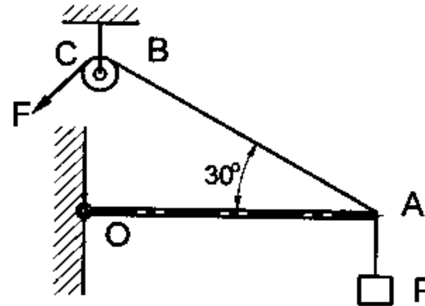
ĐS: $AC = AD = 1,41m$; $T = 56\ kN$; $N_A = 25\ kN$.

2.9. Cần OA đồng chất trọng lượng G = 200N, quay quanh trục O. Tác dụng lực kéo F đặt tại C truyền qua dây AB để giữ cần OA cân bằng ở vị trí nằm ngang. Đầu A treo vật nặng P =1000N. Tìm trị số lực kéo F và phản lực tại bản lề O (Hình 2-23).

ĐS: $F = 2200N$; $X_O = 1100\sqrt{3}N$; $Y_O = 100N$



Hình 2-22



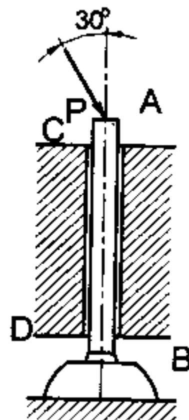
Hình 2-23

2.10. Chày ép AB trượt được theo máng trượt thẳng đứng CD. Chày chịu lực ép P = 1kN, đặt tại A, nghiêng 30° với chày. Biết AB = 40cm, CD = 30cm, AC = DB = 5cm. Tìm sức ép xuống vật B và phản lực của máng trượt (xem như ngàm). Bỏ qua trọng lượng và đường kính của chày (Hình 2-24).

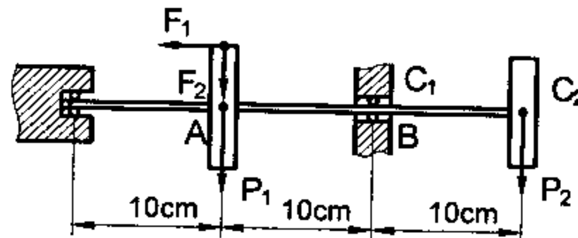
ĐS: $N_B = 0,87\ kN$; $N = 0,5\ kN$; $M = 0,1\ kNm$

2.11. Trục AB nằm ngang mang hai puli, puli C_1 có trọng lượng P_1= 200N, puli C_2 có trọng lượng P_2 = 600N. Cho bán kính puli R_1= 10cm; F_1= 800N ; F_2 = 200N; $AC_1 = C_1B = BC_2$ = 10cm (Hình 2-25). Tìm phản lực liên kết tại hai gối A, B?

ĐS: $X_A = 800\ N$; $Y_A = 300\ N$; $N_B = 700\ N$



Hình 2-24

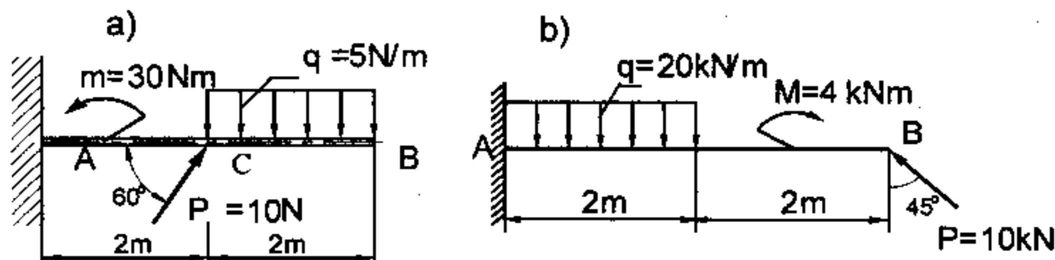


Hình 2-25

2.12. Hãy xác định phản lực tại ngàm A trong các hình 2-26a,b (2-26b cho P = 5 kN).

<u>ĐS</u>: a) X_A = -5 N ; Y_A = 1,34 N ; M_A = 17,32 Nm

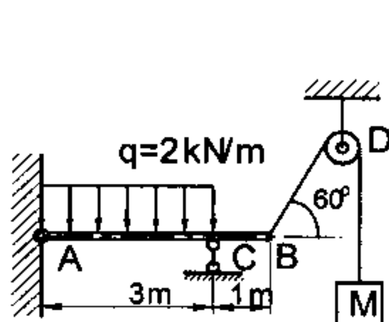
b) X_A = 7,07 kN ; Y_A = 32,93 kN ; M_A = 15,72 kNm



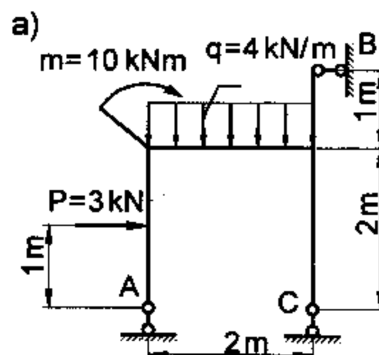
Hình 2-26

2.13. Thanh AB liên kết khớp quay tại A, liên kết con lăn tại C. Đầu B buộc sợi dây vắt qua ròng rọc D (bán kính không đáng kể) đầu kia treo vật M có trọng lượng 1kN.
Tìm phản lực liên kết tại A và C (Hình 2-27).

<u>ĐS</u>: X_A = - 0,5 kN; Y_A = 3,29 kN; N_C = 1,84 kN

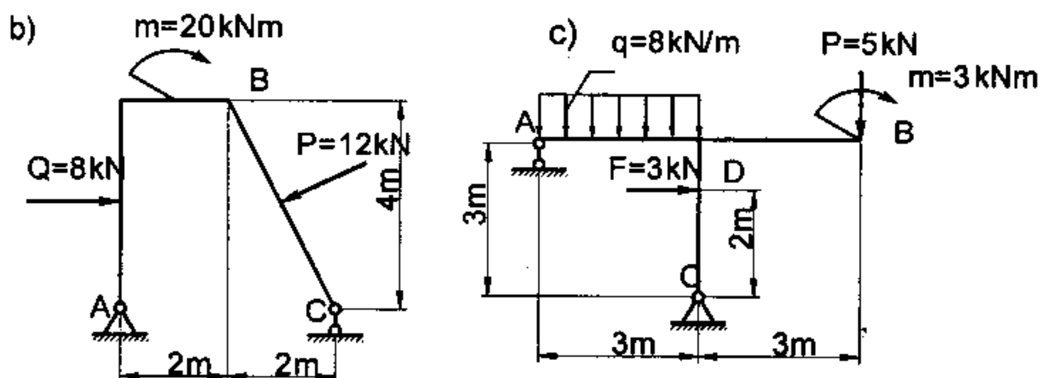


Hình 2-27



Hình 2-28

2.14. Tìm phản lực liên kết tại các gối của các khung chịu lực hình 2-28



Hình 2-28

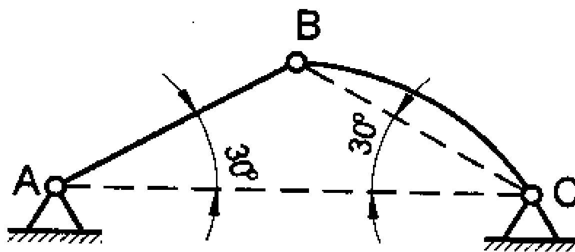
<u>ĐS</u>: a) $N_A = 2$ kN; $N_B = 3$ kN; $N_C = 6$ kN
b) Lực P đặt vuông góc tại trung điểm đoạn BC
$X_A = 2{,}74$ kN; $Y_A = -2{,}29$ kN; $N_C = 7{,}66$ kN
c) $N_A = 4$ kN; $X_B = -3$ kN; $Y_B = 25$ kN.

2.15. Xà đồng chất AB trọng lượng P, thanh cong tuỳ ý BC không trọng lượng nối khớp với nhau tại B, đồng thời nối khớp với các gối A, C trên cùng đường nằm ngang. Xác định phản lực liên kết tại hai gối A và C (Hình 2-29).

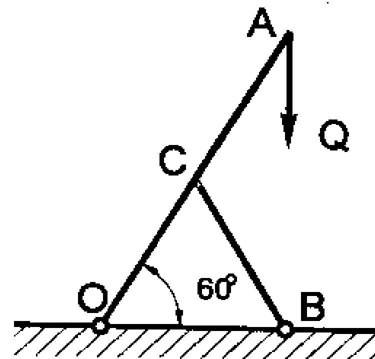
<u>ĐS</u>: $X_A = \dfrac{P\sqrt{3}}{4}$; $Y_A = \dfrac{3P}{4}$; $R_C = \dfrac{P}{2}$

2.16. Thanh OA đồng chất trọng lượng P, quay quanh O được giữ nhờ thanh chống BC. Cho OC = CA = CB = a. Tìm ứng lực thanh BC và phản lực trục O khi đầu A có một người đứng với trọng lượng Q (Hình 2-30).

<u>ĐS</u>: $S = \dfrac{\sqrt{3}(2Q+P)}{3}$; $X_O = S.\cos 60^0$; $Y_O = P/2$

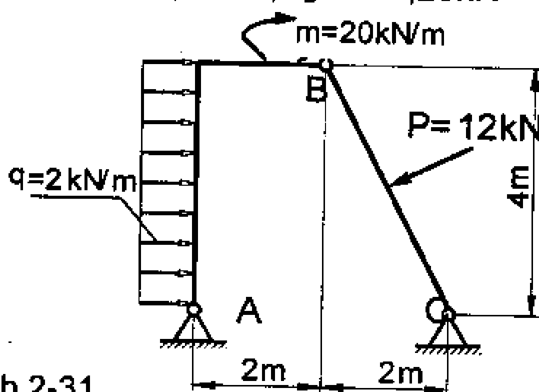


Hình 2-29

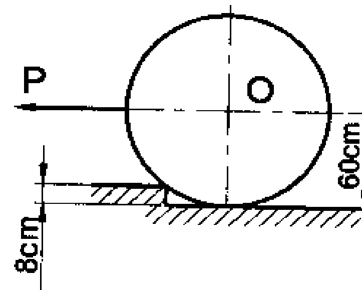


Hình 2-30

2.17. Hệ khung chịu lực như hình 2-31. Hãy xác định phản lực liên kết tại hai gối A, C và khớp trung gian B.
<u>ĐS</u>: $X_A = -0{,}14kN$; $Y_A = -2{,}29kN$; $X_C = 2{,}88kN$; $Y_C = 7{,}66kN$;
$X_B = \pm 7{,}86kN$; $Y_B = \pm 2{,}29kN$



Hình 2-31



Hình 2-32

2.18. Quả lu đồng chất trọng lượng 2kN, bán kính R = 60cm. Xác định lực kéo ngang cần thiết P để kéo được quả lu vượt qua bậc đá cao 8cm (Hình 2-32).

ĐS: $P > 1,15\ kN$.

2.19. Thanh AB gắn vào A bằng bản lề, đầu B treo vật nặng P = 50N và tựa lên quả cầu nhẵn tại C. Quả cầu nặng Q = 100N, bán kính R = 20cm, AB = 50cm. Tìm phản lực ở các điểm A, E, D và sức ép của thanh lên quả cầu. Trọng lượng thanh AB là G = 200N (Hình 2-33).

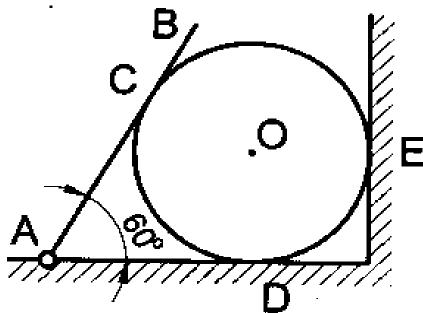
ĐS: $X_A = 93,75N$; $Y_A = 195,9N$; $N_C = 108,2N$;
$N_D = 151,1N$; $N_E = 93,75N$

2.20. Hai thanh AB và CD đồng chất, AB = CD = 1m nối với nhau bằng bản lề tại D, gắn vào tường cũng bằng khớp bản lề tại A và C. Đầu B chịu tác dụng lực P = 250N. Tìm phản lực liên kết tại A và C (Hình 2-34) trong hai trường hợp:

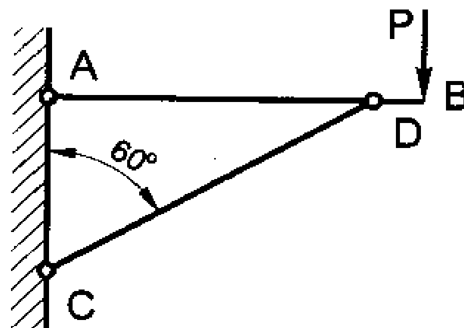
a). Thanh AB có trọng lượng 100N, bỏ qua trọng lượng thanh CD.

b). Thanh AB và thanh CD đều có trọng lượng là 100N.

ĐS: a) $X_A = -600N$; $Y_A = 3,58N$; $R_C = 692,84N$
b) $X_A = -686,6N$; $Y_A = 3,58N$; $Y_C = 446,42N$.



Hình 2-33



Hình 2-34

2.21. Lực thẳng đứng $\vec{P}$ đặt vào đòn OA truyền tác dụng xuống cần BD thông qua con trượt B. Cần BD trượt theo máng trượt C thẳng đứng. Biết đòn OA nghiêng 30^0 với đường nằm ngang, CD = CB = a, OB = BA.

Tìm lực nén tại D và phản lực máng trượt (xem như loại ngàm) (Hình 2-35).

ĐS: $N_D = \frac{3}{2}P$; $N_C = P\frac{\sqrt{3}}{2}$; $M_C = aP\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.22. Ngẫu lực M đặt vào tay quay OA quay được quanh trục O. Nhờ con chạy A có thể trượt dọc CB mà lực truyền tác dụng sang cần CB. Biết OC thẳng đứng, OA = R nằm ngang, $\hat{C} = 30^0$, CB = 3R. Tìm lực $\vec{Q}$ nằm ngang cần đặt vào B và các phản lực tại O, C để cơ

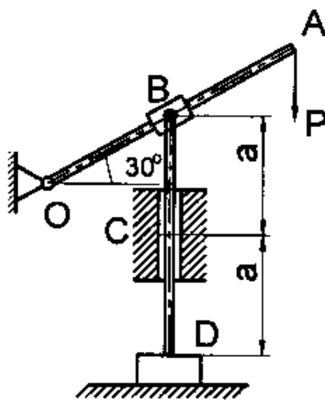
cầu cân bằng (Hình 2-36).

$$\underline{ĐS}:\ Q = \frac{8M\sqrt{3}}{9R};\ X_O = -\frac{\sqrt{3}}{R}M;\ Y_O = \frac{M}{R};\ X_C = \frac{M}{3R\sqrt{3}};\ Y_C = \frac{M}{R}$$

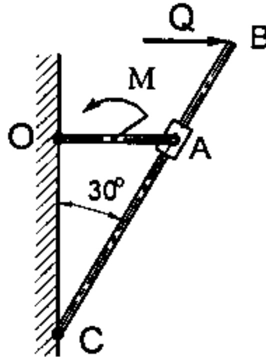
2.23. Máy ép ở vị trí như hình 2-37, cho OA = R.

Tìm ứng lực trong tay biên AB, lực ép tại C và phản lực của ống máng trượt (thu về D).

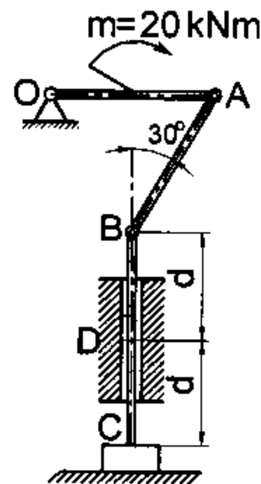
$$\underline{ĐS}:\quad S_{AB} = \frac{2M}{R\sqrt{3}};\ N_C = \frac{M}{R};\ N_D = X_D = \frac{M}{R\sqrt{3}};\ M_D = -\frac{Md}{R\sqrt{3}}$$



Hình 2-35



Hình 2-36



Hình 2-37

2.24. Dầm nằm ngang OC dài 2m, đồng chất, trọng lượng P = 1000N, chịu tác dụng của ngẫu lực $(\vec{Q},\vec{Q})$ trong mặt nằm ngang trị số Q = 100N tay đòn EF = 20cm. Dầm liên kết với tường nhờ gối cầu O và hai dây AB và CD, cho OB = 0,5m.

Tìm phản lực tại O và sức căng các dây (Hình 2-38).

<u>ĐS</u>: $T_{CD} = 1000N$; $T_{BA} = 80N$; $X_0 = -40N$;

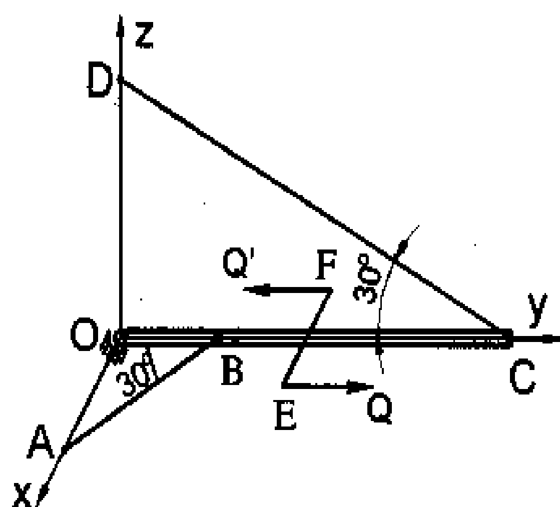
$Y_0 = 540\sqrt{3}\ N$; $Z_0 = 500N$.

2.25. Người công nhân nâng đều tải trọng Q = 80kN nhờ một cái tời như hình 2-39. Bán kính của tang quay R = 5 cm ; độ dài tay quay AK = 40 cm ; AC = CB = 50 cm.

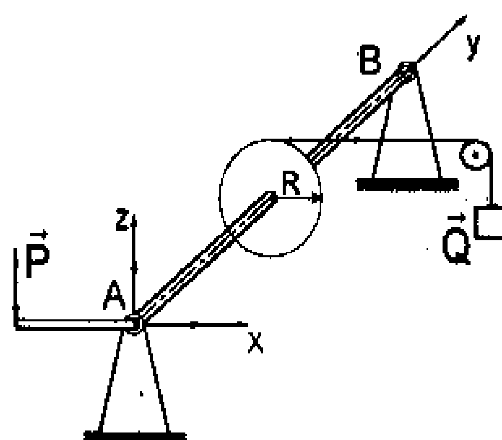
Xác định áp lực lên tay quay và áp lực của trục giá lên gối tựa A và B trong trường hợp tay quay AK nằm ngang, lực P thẳng đứng.

<u>ĐS</u>: $X_B = -40\ kN$; $P = 10\ kN$; $Z_B = 0$;

$Z_A = 10\ kN$; $X_A = -40\ kN$



Hình 2-38



Hình 2-39

CHƯƠNG 3
MA SÁT

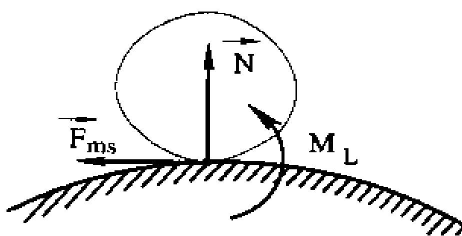
Mục đích:
Xét xem phản lực liên kết xuất hiện như thế nào khi ma sát, đặc điểm của phản lực và điều kiện cân bằng.
Hiểu rõ ma sát chúng ta có thể khống chế ma sát (đỡ bớt nặng nhọc) hay ngược lại lợi dụng ma sát (để giữ vật như trong băng tải, thiết bị kích...).
Yêu cầu:
1. Thấy rõ khi có ma sát, tại chỗ có liên kết xuất hiện thêm lực ma sát tương ứng cản chuyển động.
2. Lực ma sát là lực có giới hạn. Tính được giới hạn của lực. Vật cân bằng khi mà lực ma sát còn nằm trong giới hạn của nó.

Ở chương 2 việc xác định phản lực đóng vai trò quan trọng trong các bài toán. Khi khảo sát liên kết chúng ta thường giả thiết liên kết hoàn toàn trơn. Thực tế không bao giờ đúng như vậy, liên kết thường cản trở những di chuyển cho phép của vật, chúng ta nói : có ma sát.
Ma sát có nhiều nguyên nhân nhưng chủ yếu là do trạng thái gồ ghề của các bề mặt tiếp xúc và độ cứng các vật (làm vật bị lún).

3.1. Định nghĩa và phân loại ma sát

3.1.1. Định nghĩa: Ma sát là hiện tượng xuất hiện những lực và ngẫu lực có tác dụng cản trở chuyển động hoặc có xu hướng chuyển động tương đối của hai vật trên bề mặt của nhau (Hình 3-1).

Hình 3-1



3.1.2. Phân loại: Tùy trạng thái chuyển động của vật mà người ta phân ma sát ra làm : Ma sát trượt, ma sát lăn,...Ngoài ra còn phân biệt ma sát khô và ma sát nhớt (mặt tiếp xúc có dầu, mỡ,...).
Trong chương này chỉ xét ma sát trượt, ma sát lăn ở trạng thái tĩnh và khô.

3.1.3. Tính chất chung của các lực ma sát
Thực nghiệm chứng tỏ rằng:
1) Lực ma sát và ngẫu lực ma sát bao giờ cũng cản trở chuyển động hoặc xu hướng chuyển động tương đối của vật khảo sát trên mặt tựa ở chỗ tiếp xúc.
2) Ở trạng thái tĩnh, cường độ của lực ma sát trượt hoặc mômen

của ngẫu lực ma sát lăn tỷ lệ với áp lực pháp tuyến xuống mặt tựa và có giá trị phụ thuộc vào tác dụng của các lực khác gây xu hướng chuyển động của vật khảo sát ấy

3) Lúc sắp sửa xảy ra chuyển động trượt, lăn tương đối của vật trên mặt tựa thì:

$$F_{ms} = f.N \; ; \; M_l = k.N$$

Trong đó f là hệ số ma sát trượt tĩnh, được xác định bằng thực nghiệm, không có thứ nguyên. Hệ số f phụ thuộc vào vật liệu và tính chất của bề mặt tiếp xúc chứ không phụ thuộc vào kích thước của bề mặt ấy.

k - hệ số ma sát lăn.

4) Hệ số ma sát khi vật chuyển động nhỏ so với khi vật đứng yên.

3.2. Điều kiện cân bằng khi kể đến các lực ma sát

3.2.1. Điều kiện cân bằng tổng quát

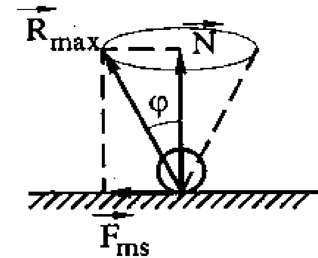
Xét vật rắn đặt trên một mặt tựa, chịu tác dụng của $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ và các phản lực liên kết gồm: phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$, ngẫu lực ma sát lăn $\vec{M}_l$. Khi vật cân bằng chúng ta có hệ lực cân bằng: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{M}_l)$. Viết các phương trình cân bằng cho hệ lực này, kèm theo các điều kiện không trượt và không lăn như sau:

Vật không trượt : $F_{ms} \le fN$

Vật không lăn : $M_l \le k.N$

3.2.2. Góc ma sát

Thực chất phản lực toàn phần của liên kết tựa là $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{ms}$. Như vậy $\vec{R}$ sẽ nghiêng với pháp tuyến một góc nào đó. Khi $\vec{F}_{ms}$ biến thiên từ 0 đến $\vec{F}_{max}$ thì $\vec{R}$ sẽ biến thiên từ 0 đến φ. Góc φ gọi là góc ma sát (Hình 3-2).



Hình 3-2

$$tg\varphi = \frac{F_{max}}{N} = \frac{f.N}{N} = f$$

Khi vật cân bằng thì phản lực $\vec{R}$ ở trong góc ma sát. Khi vật ở trạng thái cân bằng giới hạn thì $\vec{R}$ tạo với $\vec{N}$ góc φ.

Ví dụ 3-1 : Con trượt hình nêm có trọng lượng là P trượt đều trong rãnh dưới tác dụng của lực $\vec{Q}$. Tìm trị số của lực ma sát phát sinh khi con trượt hình nêm trượt



Hình 3-3

trong rãnh. So sánh với lực ma sát phát sinh khi con trượt cùng trọng lượng trượt trên mặt phẳng (Hình 3-3).

Giải :

Gọi $\vec{N}$ là phản lực pháp tuyến của mặt rãnh. Chiếu tất cả các lực lên trục thẳng đứng chúng ta được:

$$2N\sin\beta - P = 0$$

Do đó : $N = \dfrac{P}{2\sin\beta}$

Nếu f là hệ số ma sát thì lực tác dụng lên mỗi mặt nêm là :

$$F = f.N = \frac{f.P}{2\sin\beta}$$

Lực tác dụng lên con trượt hình nêm là : $F_1 = 2F = \dfrac{fP}{\sin\beta} = f_1P$

trong đó : $f_1 = \dfrac{f}{\sin\beta}$

Lực ma sát phát sinh khi con trượt cùng trọng lượng trượt trên mặt phẳng là :

$$F_2 = fN = fP$$

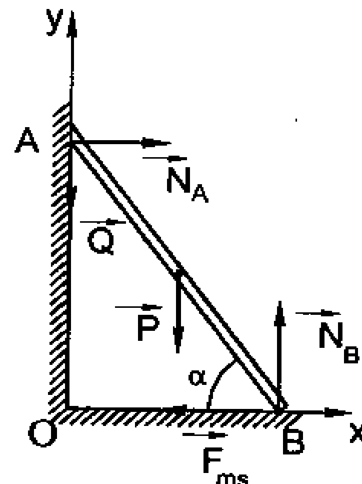
Do $\sin\beta < 1$ nên $f_1 > f$, tức là $F_1 > F_2$

Từ các biểu thức của lực ma sát ta đi đến kết luận:

Ma sát ở con trượt hình nêm lớn hơn ma sát ở con trượt phẳng. Do đó con trượt hình nêm được dùng nhiều trong các cơ cấu cần ma sát nhiều.

Ví dụ 3-2 :

Một cái thang AB trọng lượng P tựa vào bức tường thẳng đứng trơn và tựa lên sàn không nhẵn nằm ngang. Hệ số ma sát tại điểm B là f. Cần phải đặt thang nghiêng một góc α với sàn bằng bao nhiêu để một người có trọng lượng Q có thể trèo lên đến tận đỉnh thang (Hình 3-4).



Hình 3-4

Giải:

- Xét cân bằng thang AB = l
- Các lực tác dụng :

$$(\vec{P},\vec{Q},\vec{N}_A,\vec{N}_B,\vec{F}_{ms}) \equiv 0$$

- Các phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kx} = N_A - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = N_B - P - Q = 0 \quad (2)$$

$\sum m_A(\vec{F}_k) = N_B.l\cos\alpha - F_{ms}.l\sin\alpha - P.\frac{l}{2}\cos\alpha = 0$ (3)

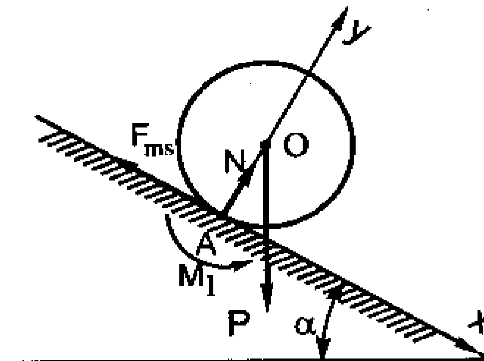
Từ (2) có : $N_B = P + Q$

Từ (3) suy ra : $N_B - F_{ms}tg\alpha - \frac{P}{2} = 0$

hay $\frac{2Q+P}{2tg\alpha} = F_{ms} \leq F_{max} = fN_B = f(P+Q) \Rightarrow tg\alpha \geq \frac{2Q+P}{2f(P+Q)}$

Ví dụ 3-3:

Tìm góc nghiêng α giữa mặt phẳng nghiêng không nhẵn với phương ngang để khối trụ trọng lượng P bán kính R không lăn xuống dưới. Cho hệ số ma sát lăn bằng k (Hình 3-5).



Hình 3-5

Giải

Xét cân bằng khối trụ hệ lực tác dụng : $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \overline{M_l}) \equiv 0$

Các phương trình cân bằng tĩnh học:

$\sum F_{kx} = P\sin\alpha - F_{ms} = 0$ (1)

$\sum F_{ky} = N - P\cos\alpha = 0$ (2)

$\sum m_A(\vec{F}_k) = M_l - R.P\sin\alpha = 0$ (3)

Để vật không lăn: $M_l \leq kN$ (4)

Từ (2) chúng ta có $N = P\cos\alpha$.

Từ (3) $\Leftrightarrow$ $M_l = R.P\sin\alpha \leq kN = kP\cos\alpha$.

$\Leftrightarrow$ $R.P\sin\alpha \leq kP\cos\alpha$ hay $tg\alpha \leq \frac{k}{R}$

3.3. Bài tập chương 3

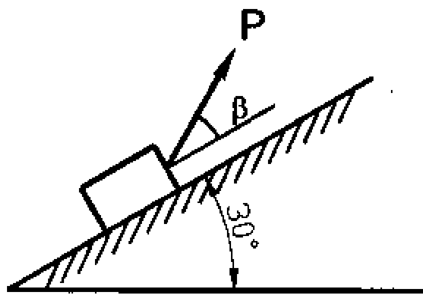
3.1. Vật nặng có trọng lượng Q = 10kN, được kéo lên trên mặt phẳng nghiêng một góc 30^0, hệ số ma sát giữa vật và mặt nghiêng f = 0,1. Góc hợp bởi lực P và mặt trượt là ß (Hình 3-6). Tìm lực kéo P để vật có thể đi lên trong hai trường hợp:

a) $ß = 0^0$; b) $ß = 30^0$

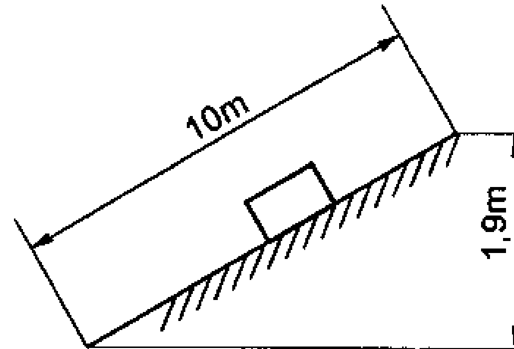
ĐS: a) P > 5,86kN; b) P > 6,4kN.

3.2. Cần nâng vật nặng G = 3000N lên độ cao 1,9m bằng mặt phẳng nghiêng dài 10m. Hệ số ma sát giữa vật với mặt phẳng nghiêng f = 0,28. Hỏi cần bao nhiêu người phải tham gia vào công việc, nếu như sức đẩy theo phương song song với mặt phẳng nghiêng của mỗi người bằng 200N (Hình 3-7).

ĐS: 7 người.



Hình 3-6



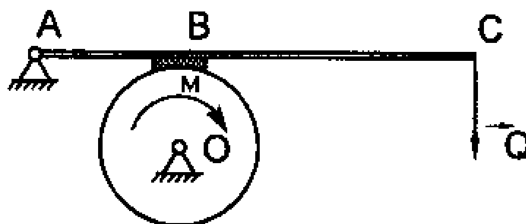
Hình 3-7

3.3. Bánh xe O có xu hướng quay dưới tác dụng của ngẫu lực M. Để giữ cân bằng, dùng lực Q thẳng đứng đặt tại đầu C của đòn nằm ngang AC quay được quanh trục A để ép má hãm B vào vành bánh xe. Biết hệ số ma sát f = 0,1, tỉ số $\frac{AB}{AC} = 0,2$, bán kính bánh xe R = 0,4m, mômen M = 10kNm. Xác định lực Q cần thiết (Hình 3-8).

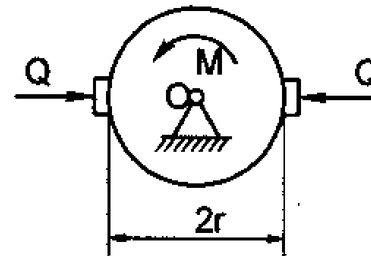
ĐS: $Q \geq 50kN$

3.4. Muốn hãm cho bánh xe không quay dưới tác dụng của ngẫu lực có trị số mômen M = 100Nm người ta tác dụng hai lực trực đối Q vào hai má hãm. Hãy tính trị số nhỏ nhất của lực Q để bánh xe không quay. Biết hệ số ma sát giữa má hãm với bánh xe là f = 0,25 và đường kính bánh xe d = 50cm (Hình 3-9).

ĐS: Q = 800N.



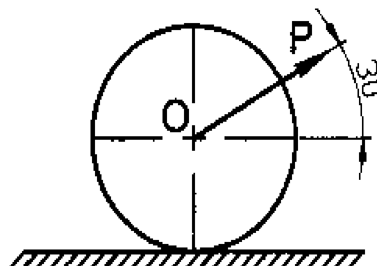
Hình 3-8



Hình 3-9

.5. Xác định lực $\vec{P}$ để con lăn hình trụ có ường kính D = 60cm nặng 3000N lăn ều trên mặt phẳng ngang. Biết hệ số ma át lăn k = 0,5 cm; lực $\vec{P}$ hợp với phương gang một góc $\alpha = 30^0$ (Hình 3-10)

ĐS: *P = 57,2 N.*



Hình 3-10

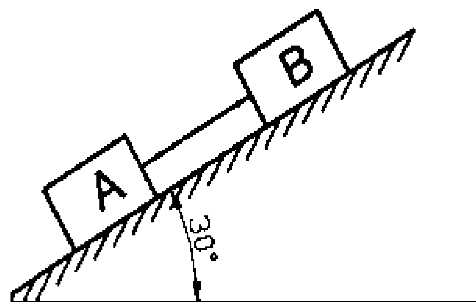
.6. Trên mặt phẳng nghiêng góc 30^0 với mặt nằm ngang có hai vật A và B, trọng lượng 200N và 400N nối với nhau bằng sợi dây. Biết hệ số ma sát giữa A và B với mặt nghiêng là $f_A = 0,5$ và $f_B = 2/3$.

Hệ hai vật có cân bằng không ? Tìm sức căng T của dây và trị số các lực ma sát (Hình 3-11).

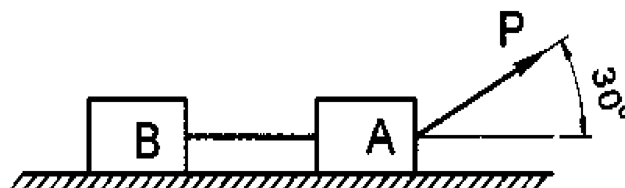
ĐS: *Hệ cân bằng ; $F_A = 86,6N$; $F_B = 213,4N$; $T = 13,4N$.*

.7. Hai vật A và B chuyển động trên mặt phẳng và được liên kết với nhau bằng dây C. Dây C truyền lực 500N. Trọng lượng của vật A là 1200N, góc $\alpha = 30^0$, hệ số ma sát của các vật với mặt phẳng f = 0,34. Hãy xác định trọng lượng của vật B và trị số của $\vec{P}$ sao cho các vật chuyển động đều (Hình 3-12).

ĐS: *$G_B = 1470N$; $P = 890N$*



Hình 3-11



Hình 3-12

CHƯƠNG 4
TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

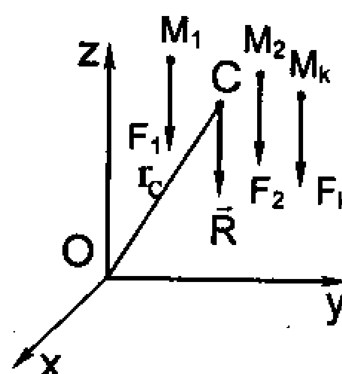
Mục đích: Nghiên cứu vấn đề thu hệ lực song song và ứng dụng tìm trọng tâm vật rắn.

Yêu cầu: 1 - Nhận biết tâm của hệ lực song song và đặc điểm của nó.

2 - Nắm được công thức tổng quát xác định trọng tâm, các phương pháp thường dùng để xác định nó.

4.1. Tâm của hệ lực song song cùng chiều

Cho hệ lực song song cùng chiều $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n)$. Điểm đặt M_k của chúng được định vị bởi véc tơ $\vec{r}_k (k = 1 \div n)$ (Hình 4-1). Khi đó hệ lực có hợp lực $\vec{R}$ song song cùng chiều với $\vec{F}_k$, có độ lớn $R = \sum_{k=1}^{n} F_k$ và đi qua điểm C (tâm của hệ lực) được định vị bởi $\vec{r}_C$



Hình 4.1

$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_k \vec{r}_k}{\sum F_k} \qquad (4\text{-}1)$$

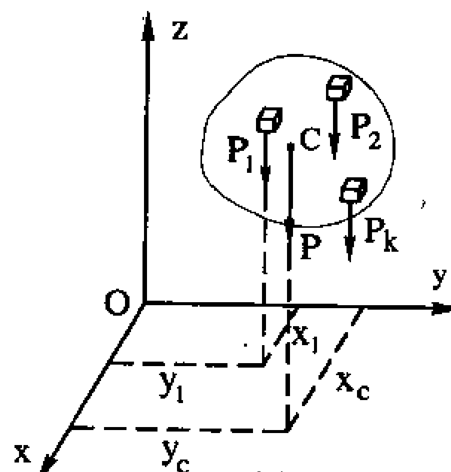
4.2. Trọng tâm của vật rắn

4.2.1. Định nghĩa và công thức xác định trọng tâm của vật rắn

Trọng tâm vật rắn là điểm đặt C của trọng lượng $\vec{P}$. Tọa độ C được xác định:

$$x_C = \frac{\sum x_k P_k}{P}; \qquad y_C = \frac{\sum y_k P_k}{P};$$

$$z_C = \frac{\sum z_k P_k}{P} \qquad (4\text{-}2)$$



Hình 4-2

Trong đó: $P = \sum p_k$ là trọng lượng toàn vật

x_k, y_k, z_k là tọa độ điểm đặt trọng lực $\vec{p}_k$ của các phần tử của vật (Hình 4-2).

4.2.2. Trọng tâm của các vật đồng chất

a) Khối đồng chất

Trọng lượng mỗi phần tử $P_k = \gamma V_k$, do đó $P = \gamma V$

Trong đó: γ - trọng lượng riêng của chất tạo thành vật ;

V_k - thể tích của phần tử k ; V - thể tích của cả vật.

Đưa các giá trị vào (4-2), chúng ta có

$$x_C = \frac{\sum x_k V_k}{V}; y_C = \frac{\sum y_k V_k}{V}; z_C = \frac{\sum z_k V_k}{V} \quad (4\text{-}3)$$

b) Mặt đồng chất

$$x_C = \frac{\sum x_k S_k}{S}; \quad y_C = \frac{\sum y_k S_k}{S} \quad (4\text{-}4)$$

Trong đó S_k - diện tích phần tử k ; S - diện tích cả mặt ta khảo sát

c) Đoạn đồng chất

$$x_C = \frac{\sum x_k L_k}{L}; \quad y_C = \frac{\sum y_k L_k}{L}; \quad z_C = \frac{\sum z_k L_k}{L} \quad (4\text{-}5)$$

4.2.3. Các phương pháp xác định trọng tâm của vật rắn đồng chất

a) Phương pháp đối xứng

Định lý - Nếu vật đồng chất có một mặt, một trục hay một tâm đối xứng thì trọng tâm của vật nằm trên mặt, trục hay tâm ấy.

Ví dụ : Các tấm chữ nhật, hình vuông, hình tròn, khối hộp, khối cầu, mặt cầu...đồng chất có trọng tâm chính là tâm đối xứng hình học của chúng.

b) Phương pháp phân chia

Để tìm trọng tâm của vật rắn chúng ta có thể phân nó ra thành n phần có trọng tâm đã biết hoặc tìm được dễ dàng, trọng lượng của từng phần là $P_1, P_2, \ldots P_n$. Khi đó toạ độ trọng tâm C của vật rắn được tính:

$$x_C = \frac{\sum x_k P_k}{\sum P_k}; \quad y_C = \frac{\sum y_k P_k}{\sum P_k}; \quad z_C = \frac{\sum z_k P_k}{\sum P_k} \quad (4\text{-}6)$$

Nếu vật là một hình phẳng, đặt nó trong hệ trục toạ độ xy, toạ độ trọng tâm C của vật phẳng được tính:

$$x_C = \frac{\sum x_k S_k}{S}; \quad y_C = \frac{\sum y_k S_k}{S} \quad (4\text{-}7)$$

Trong đó x_k, y_k, S_k là tọa độ trọng tâm và diện tích các hình nhỏ.

P_k hoặc S_k sẽ có trị số âm (-) ứng với những phần vật thể bị khuyết đi.

4.2.4. Trọng tâm một số vật thường gặp:

a) Trọng tâm của tam giác đồng chất

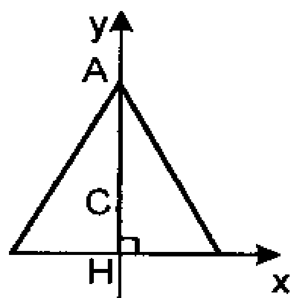
C là giao điểm của ba đường trung tuyến.

Tam giác cân có trọng tâm $C(0; \frac{1}{3}AH)$ (Hình 4-3)

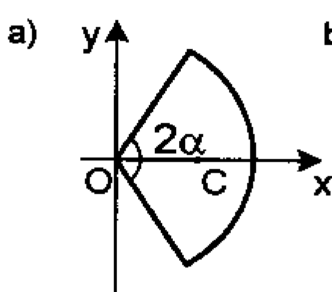
b) Trọng tâm của tấm đồng chất hình quạt có góc chắn cur 2α (Rad).

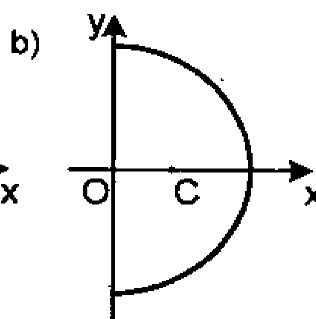
$C(\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha};0)$ (Hình 4-4a)

Nửa tấm tròn đồng chất có bán kính R, $C(\frac{4}{3}\frac{R}{\pi};0)$ (Hình 4-4b)



Hình 4-3

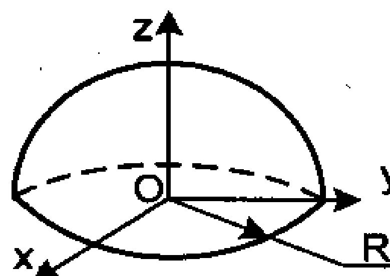




Hình 4-4

c) Trọng tâm của bán cầu đồng chất tâm O, bán kính R:

$C(0 ; 0 ; \frac{3}{8}R)$ (Hình 4-5)

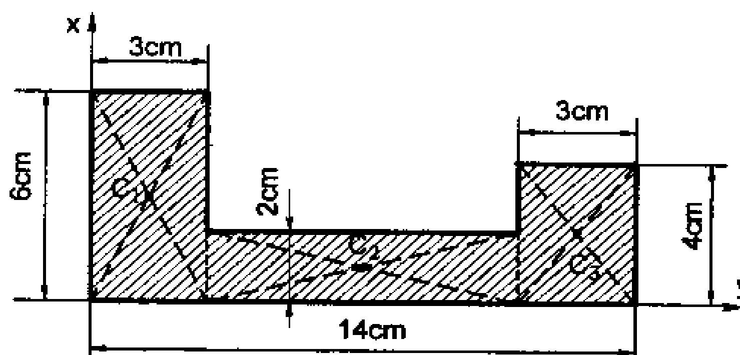


Hình 4-5

Ví dụ 4-1:

Xác định trọng tâm của vật cho kích thước như hình 4-6

Hình 4-6



Giải :

Ta phân hình làm 3 chữ nhật, diện tích và tọa độ trọng tâm của chúng tương ứng là :

$S_1 = 18\,cm^2$, $C_1(1,5 ; 3)$. $S_2 = 16\,cm^2$, $C_2(7 ; 1)$

$S_3 = 12\,cm^2$, $C_3(12,5 ; 2)$

Diện tích toàn hình là :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 18 + 16 + 12 = 46\ cm^2$$

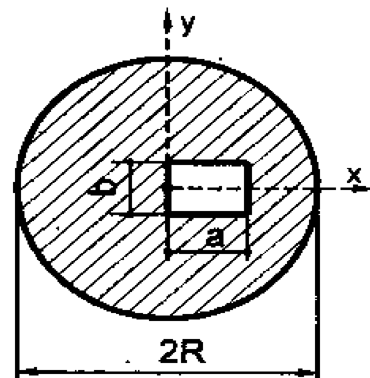
Áp dụng công thức (4-7) chúng ta có :

$$x_C = \frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{S} = \frac{1{,}5.18 + 7.16 + 12{,}5.12}{46} = 6\frac{13}{46}cm$$

$$y_C = \frac{y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3}{S} = \frac{3.18 + 1.16 + 2.12}{46} = 2\frac{1}{23}cm$$

Ví dụ 4-2

Xác định trọng tâm của hình khuyết như hình 4-7



Hình 4-7

Giải :

Trọng tâm C nằm trên trục đối xứng 0x ($y_C = 0$). Ta xem vật là do hình tròn 1 và mảnh chữ nhật 2 ghép lại, chúng có diện tích và tọa độ trọng tâm tương ứng là :

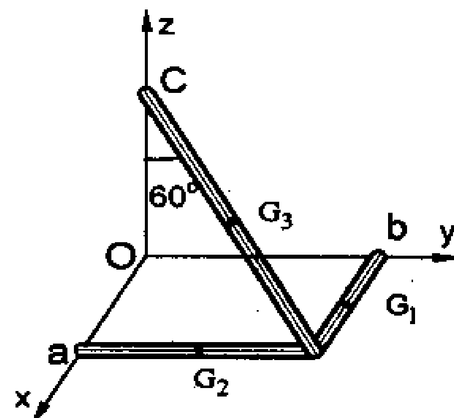
$S_1 = \pi R^2$, $C_1(0\,;0)$. $S_2 = ab$, $C_2(\frac{a}{2}; 0)$

Áp dụng công thức (4-7) chúng ta có :

$$x_C = \frac{O \times \pi R^2 + \frac{a}{2}(-ab)}{\pi R^2 + (-ab)} = -\frac{a^2b}{2(\pi R^2 - ab)}$$

Ví dụ 4-3:

Tìm trọng tâm hệ ba thanh đồng chất, cùng thiết diện, cùng vật liệu bố trí như hình 4-8.



Hình 4-8

Giải :

Thay ba thanh bởi ba chất điểm G_1, G_2, G_3 có trọng lượng tỷ lệ với độ dài :

$p_1 = a$, $p_2 = b$, $p_3 = 2c$ và có tọa độ :

$G_1(\frac{a}{2}\,; b\,; 0)$; $G_2(a\,; \frac{b}{2}\,; 0)$;

$G_3 (\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2})$.

Tọa độ trọng tâm của hệ là :

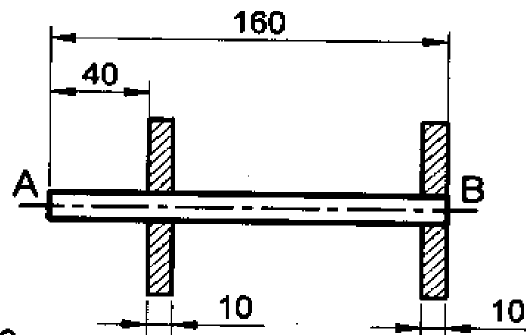
$$x_G = \frac{1}{P}(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3) = \frac{a^2 + 2ab + 2ac}{2(a+b+2c)} ;$$

$$y_G = \frac{2a + b^2 + 2bc}{2(a+b+2c)} ; \quad z_C = \frac{c^2}{a+b+2c}$$

4.3. Bài tập chương 4

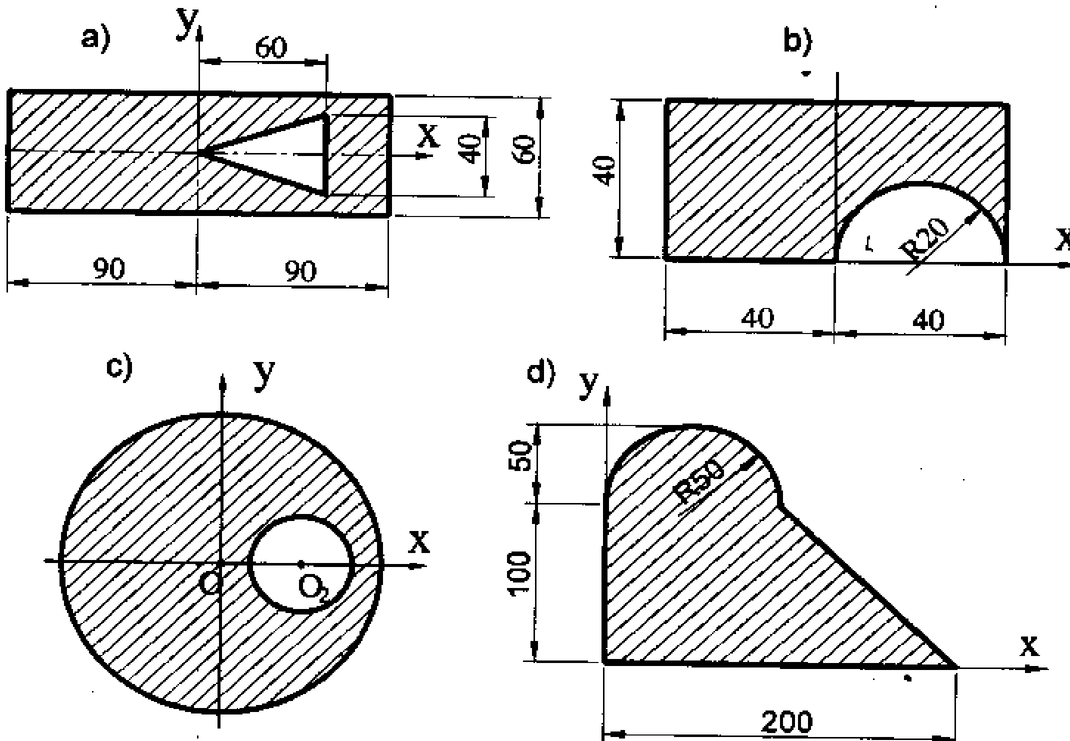
4.1. Lắp vào trục AB có trọng lượng 5N hai chiếc vành, mỗi chiếc trọng lượng 2,5N. Xác định vị trí trọng tâm chung của trục và hai vành (Hình 4-9), đơn vị cm.

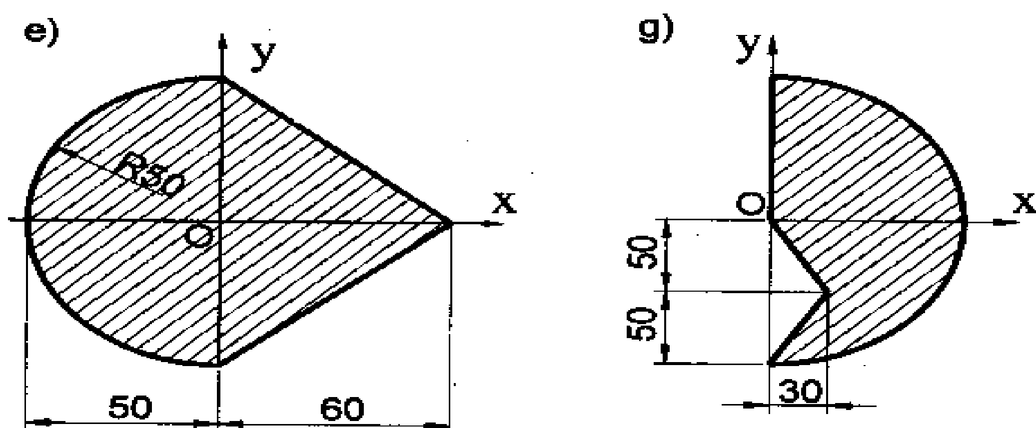
ĐS: AC = 90 cm



Hình 4-9

4.2. Xác định trọng tâm của các tấm phẳng đồng chất có hình dạng và kích thước ở hình 4-10



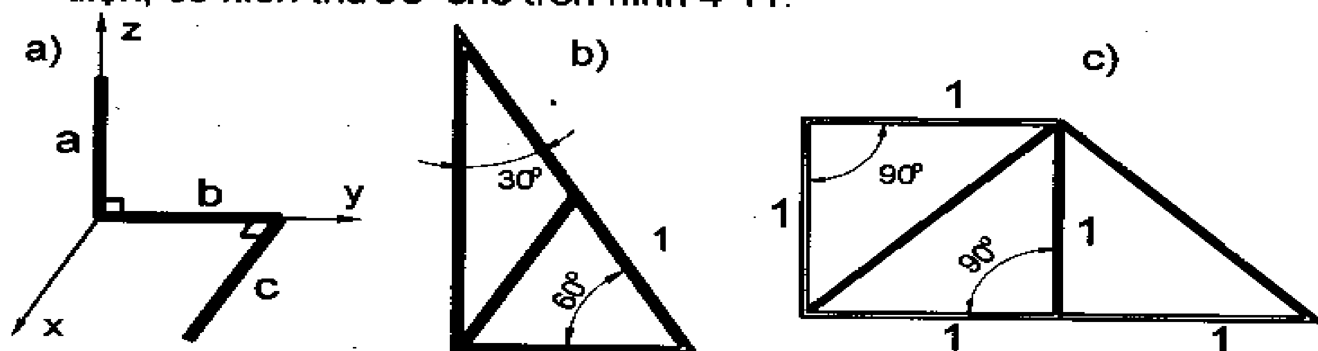


Hình 4-10

ĐS: a) $C(-5\ ;\ 0)$ *b)* $C(-4{,}88\ ;\ 22{,}8)$ *c)* $C\left(-\dfrac{R_1R_2^2}{2(R_1^2-R_2^2)}\ ;0\right)$

d) $C(72\ ;\ 60{,}36)$ *e)* $C(-3{,}37\ ;\ 0)$ *g)* $C(45{,}89\ ;\ 5{,}28)$

4.3. Xác định trọng tâm hệ thanh đồng chất, cùng vật liệu cùng thiết diện, có kích thước cho trên hình 4-11.



Hình 4-11

ĐS: a) $x = \dfrac{c^2}{2(a+b+c)}$; $y = \dfrac{b^2}{2(a+b+c)}$; $z = \dfrac{a^2+2bc}{2(a+b+c)}$

b) $x = \dfrac{7}{4(4+\sqrt{3})}$; $y = \dfrac{(5+2\sqrt{3})\sqrt{3}}{4(4+\sqrt{3})}$

c) $x = \dfrac{3{,}5+2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$; $y = \dfrac{2+\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$

PHẦN II

ĐỘNG HỌC

CHƯƠNG 5
CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

Yêu cầu : * Nắm vững các đại lượng đặc trưng cho chuyển động của điểm, vai trò và ý nghĩa của chúng.
* Phân biệt các phương pháp khảo sát chuyển động, nắm vững biểu thức tổng quát của các yếu tố chuyển động và cách xác định trong từng phương pháp.

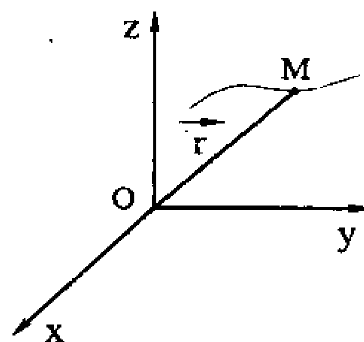
5.1. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp véc tơ

5.1.1. Phương trình chuyển động của điểm

Xét điểm M chuyển động trong hệ toạ độ Đề các Oxyx (Hình 5-1). Vị trí của nó được xác định bởi véc tơ định vị $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Khi M chuyển động thì $\vec{r}$ thay đổi theo thời gian.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (5\text{-}1)$$

(5-1) là phương trình chuyển động của điểm M viết dưới dạng véc tơ, đồng thời nó cũng là phương trình quỹ đạo của M trong hệ toạ độ Đècác Oxyz viết dưới dạng tham số.



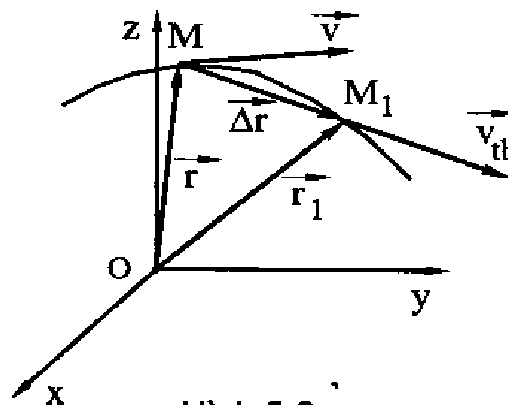
Hình 5-1

Quỹ tích các điểm ngọn của véc tơ định vị $\vec{r}$ trong hệ tọa độ Oxyz chính là quỹ đạo của M. Nếu quĩ đạo thẳng, chúng ta có chuyển động thẳng. Nếu quĩ đạo cong, chúng ta có chuyển động cong.

5.1.2. Vận tốc của động điểm

Véc tơ vận tốc của điểm là đại lượng đặc trưng cho sự biến đổi của véc tơ định vị $\vec{r}$ theo thời gian. Do vậy để xác định véc tơ vận tốc ta cần khảo sát sự thay đổi của $\vec{r}$ ở lân cận ở thời điểm t nào đó.

Giả sử ở thời điểm t, động điểm ở vị trí M được định vị bởi véc tơ $\vec{r}$. Tại thời điểm $t_1 = t_1 + \Delta t$, động điểm ở vị trí M_1, được định vị bởi véc tơ $\vec{r}_1$. Như vậy, trong khoảng thời gian Δt, động điểm



Hình 5-2

di chuyển được một cung MM_1 (Hình 5-2) : $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \overrightarrow{MM_1}$

Véc tơ vận tốc trung bình $\vec{v}_{tb} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ mô tả gần đúng hướng và ận tốc chuyển động của động điểm tại thời điểm t. Nếu Δt càng nhỏ thì độ chính xác của vận tốc càng cao.

Vận tốc tức thời của động điểm M tại thời điểm t là một véc tơ :

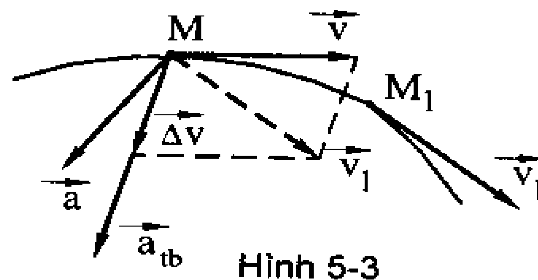
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{tb} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (5\text{-}2)$$

Vì $\vec{v}_{tb}$ nằm trên cát tuyến MM_1 nên khi $\Delta t \to 0$, vận tốc $\vec{v}$ phải nằm trên tiếp tuyến với quĩ đạo của động điểm tại vị trí đang xét và hướng theo chiều chuyển động của nó. Đơn vị đo cơ bản của vận tốc là m/s (1/s).

5.1.3. Gia tốc của động điểm

Gia tốc của điểm là một đại lượng véc tơ đặc trưng cho sự thay đổi về trị số và chiều của vận tốc của điểm theo thời gian.

Véctơ gia tốc trung bình của điểm trong khoảng thời gian Δt : $\vec{a}_{tb} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$



Hình 5-3

Như vậy véc tơ gia tốc trung bình có chiều của véc tơ $\overrightarrow{\Delta v}$, nghĩa là cùng hướng về phía lõm của quĩ đạo (Hình 5-3).

Gia tốc tức thời của điểm ở thời điểm t là đại lượng véc tơ $\vec{a}$, bằng giới hạn của gia tốc trung bình $\vec{a}_{tb}$ khi Δt tiến tới không: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

hay
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \qquad (5\text{-}3)$$

5.2. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp tọa độ Đề các

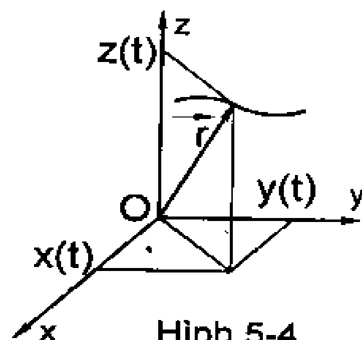
5.2.1. Phương trình chuyển động của điểm

Trong tọa độ Đề các (Hình 5-4) vị trí của M được xác định bởi ba tọa độ (x, y, z). Khi M chuyển động, các tọa độ này thay đổi theo thời gian :

$x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ (5-4)

(5-4) chính là các phương trình chuyển động của điểm dạng tọa độ Đề các.

Từ các phương trình chuyển động, khử t ta được phương trình quỹ đạo của điểm.



Hình 5-4

5.2.2 Vận tốc chuyển động

$$v_x = \dot{x}(t); \quad v_y = \dot{y}(t); \quad v_z = \dot{z}(t) \qquad (5\text{-}5)$$

Từ đó, xác định được trị số của vận tốc v và côsin chỉ phương của $\vec{v}$:

$$\begin{cases} v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ \text{Cos}(\vec{v}, Ox) = \dfrac{v_x}{v}\ ;\ \text{Cos}(\vec{v}, Oy) = \dfrac{v_y}{v}\ ;\ \text{Cos}(\vec{v}, Oz) = \dfrac{v_z}{v} \end{cases} \qquad (5\text{-}6)$$

5.2.3 Gia tốc chuyển động

Gọi a_x, a_y, a_z là các hình chiếu của $\vec{a}$ trên các trục tọa độ Ox; Oy; Oz tương ứng, ta có:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}(t); \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}(t); \qquad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}(t) \qquad (5\text{-}7)$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (5\text{-}8)$$

$$\text{Cos}(\vec{a}, Ox) = \frac{a_x}{a}; \qquad \text{Cos}(\vec{a}, Oy) = \frac{a_y}{a}; \qquad \text{Cos}(\vec{a}, Oz) = \frac{a_z}{a} \qquad (5\text{-}9)$$

5.2.4. Tính chất chuyển động :

$$\vec{v}.\vec{a} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} \begin{cases} > 0 \text{ điểm chuyển động nhanh dần} \\ < 0 \text{ điểm chuyển động chậm dần} \end{cases}$$

Ví dụ 5-1 : Chuyển động của điểm cho bởi các phương trình:

$$x = 8t - 4t^2 \qquad (a)$$

$$y = 6t - 3t^2 \qquad (b)$$

trong đó x, y tính bằng m ; t tính bằng s.

Xác định quĩ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm. Xét tính chất của chuyển động.

Giải:

1. Xác định quĩ đạo:

Khử t khỏi phương trình chuyển động. Muốn vậy chúng ta nhân 2 vế của phương trình (a) với 3, phương trình (b) với 4 rồi trừ vế với vế, chúng ta có : $3x - 4y = 0$ hay $y = \dfrac{3}{4}x$

Như vậy, quĩ đạo của chuyển động là một đường thẳng, hợp với trục Ox một góc α với $tg\alpha = \dfrac{3}{4}$ (Hình 5-5)

2. Xác định vận tốc, gia tốc.

a. Vận tốc:

$$v_x = \dot{x} = 8(1-t)$$

$$v_y = \dot{y} = 6(1-t)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10(1-t)\ m/s$$

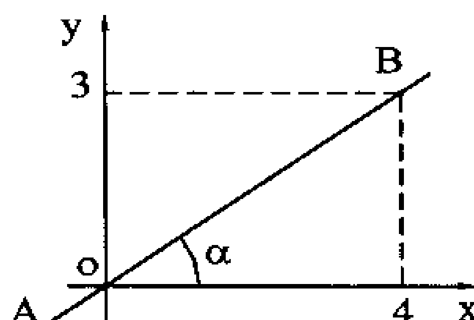
b. Gia tốc: $a_x = \ddot{x} = -8m/s^2$

$a_y = \ddot{y} = -6m/s^2$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10m/s^2$$

3. Tính chất của chuyển động: Xét tích vô hướng $\vec{v}.\vec{a}$.

$$\vec{v}.\vec{a} = v_x.a_x + v_y.a_y = 8(1-t).(-8) + 6(1-t).(-6)$$
$$= (-64-36)(1-t) = -100(1-t)$$



Hình 5-5

+ Khi t = 0: x = 0; y = 0; v_o = 10m/s, động điểm ở gốc toạ độ 0.

+ Khi 0 < t < 1s: $\vec{v}.\vec{a} < 0$: Điểm chuyển động chậm dần ($\vec{v}$ và $\vec{a}$ ngược chiều). Gia tốc của điểm : $a_x = -8m/s^2$; $a_y = -6m/s^2$; $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10m/s^2$

+ Khi t = 1s: Điểm có toạ độ: x = 4; y = 3; động điểm ở điểm B, v = 0

+ Khi 1s < t < 2s : $\vec{v}.\vec{a} > 0$: Điểm chuyển động nhanh dần ($\vec{v}$ và $\vec{a}$ cùng chiều). Động điểm di chuyển theo chiều từ B về gốc toạ độ 0. Gia tốc của điểm a = 10m/s^2.

+ Khi t = 2s : x = 0; y = 0, v = 10m/s. Điểm qua điểm 0.

+ Khi t > 2s : $\vec{v}.\vec{a} > 0$: Điểm chuyển động nhanh dần về ở góc phần tư thứ tư của hệ toạ độ 0xy, xa dần điểm 0 (dọc theo OA). Gia tốc của điểm a = 10m/s^2.

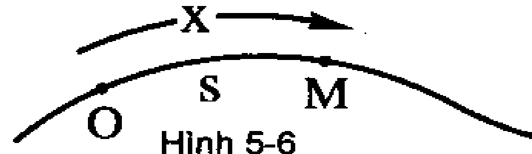
5.3. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp tọa độ tự nhiên

Khi biết quỹ đạo của điểm ta dùng phương pháp này.

5.3.1. Phương trình chuyển động của điểm

Trên quĩ đạo chuyển động của điểm (Hình 5-6), ta chọn một điểm O nào đó là gốc. Định chiều dương của quĩ đạo. Để thuận tiện, người ta thường chọn chiều dương là chiều chuyển động của điểm. Khi đó, vị trí

của điểm được xác định bởi thông số s bằng cung OM. Khi M chuyển động thông số định vị s sẽ thay đổi theo thời gian t :



Hình 5-6

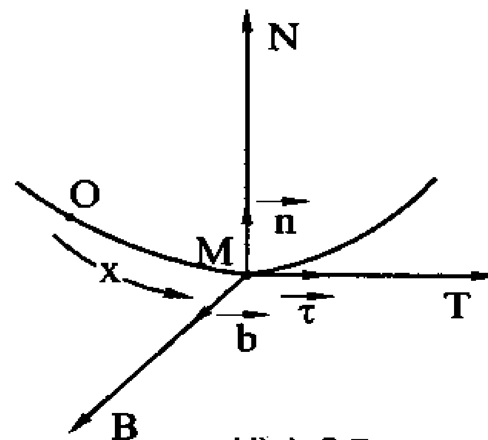
$$\bar{s} = \bar{s}(t) \qquad (5\text{-}11)$$

Đó chính là phương trình chuyển động của điểm dạng tọa độ tự nhiên.

5.3.2. Vận tốc của điểm

Chúng ta lập hệ trục tọa độ tự nhiên có gốc tại vị trí M. Có trục tiếp tuyến MT với các véc tơ đơn vị $\vec{\tau}$ thuận theo hướng dương của quỹ đạo, trục pháp tuyến chính MN nằm trong mặt phẳng mật tiếp, vuông góc với trục tiếp tuyến có véc tơ đơn vị $\vec{n}$ hướng vào bề lõm quỹ đạo.

Trục trùng pháp tuyến MB vuông góc với hai trục trên có véc tơ đơn vị $\vec{b}$ sao cho $M_{\vec{\tau}\vec{n}\vec{b}}$ là tam diện thuận (Hình 5-7). Vì $\vec{v}$ nằm trên trục MT nên nó có thể biểu diễn qua hình chiếu v_τ như sau :



Hình 5-7

$$\vec{v} = v_\tau.\vec{\tau} \qquad (5\text{-}12)$$

$$v_\tau = \dot{s}(t) \qquad (5\text{-}13)$$

5.3.3. Gia tốc của điểm

Biểu diễn gia tốc theo ba hình chiếu của nó trên ba trục tọa độ tự nhiên chúng ta có :

$$\vec{a} = a_\tau.\vec{\tau} + a_n.\vec{n} + a_b.\vec{b}$$

trong đó $a_b = o$

gia tốc tiếp tuyến : $a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{s}$ (5-14)

gia tốc pháp tuyến : $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}$ (5-15)

trị số gia tốc : $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ (5-16)

Tóm lại, gia tốc của điểm chỉ gồm hai thành phần tiếp và pháp tuyến, và vì $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ luôn dương nên $\vec{a}$ luôn hướng vào bề lõm của quỹ đạo.

5.3.4. Ý nghĩa của các thành phần gia tốc

a. $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = 0$ thì $\rho = \infty$ tức là điểm chuyển động thẳng.

b. $a_n \neq 0$ điểm chuyển động cong. Vậy a_n biểu thị sự đổi hướng của vận tốc.

c. $a_\tau = \dot{v}_\tau = 0$ thì $v_\tau = const$, điểm chuyển động đều.

d. $a_\tau \neq 0$ thì v_τ biến đổi, điểm chuyển động không đều. Vậy a_τ biểu thị sự thay đổi trị số của vận tốc.

5.3.5. Tính chất của chuyển động

$\overline{v}.\overline{a}_\tau > 0$: điểm chuyển động nhanh dần ($\vec{v}$ và $\vec{a}_\tau$ cùng chiều)

$\overline{v}.\overline{a}_\tau < 0$: điểm chuyển động chậm dần ($\vec{v}$ và $\vec{a}_\tau$ ngược chiều)

5.3.6. Các dạng chuyển động đặc biệt

a) Chuyển động đều :

$v = const$ suy ra : $a_\tau = 0$; $s = vt$ (5-12)

b) Chuyển động biến đổi đều : $a_\tau = const$ suy ra :

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 \pm a_\tau t \\ s &= s_o + v_0 t \pm \frac{a_\tau}{2} t^2 \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}13)$$

Dấu + : ứng với chuyển động nhanh dần đều;
dấu - : chuyển động chậm dần đều.

Ví dụ 5-2:

Trong thời gian mở máy, một điểm trên vành vô lăng có chuyển động theo quy luật $s = 0{,}1t^3$ (s tính bằng m; t tính bằng giây). Xác định gia tốc và tính chất chuyển động của điểm ở thời điểm khảo sát, biết rằng lúc đó vận tốc bằng 30m/s. Bán kính vô lăng là 2m.

Giải :

1.Vận tốc và gia tốc :

$$v = |\dot{s}| = 0{,}3t^2 \text{ ; khi } v = 30\text{m/s thì } t = \sqrt{\frac{v}{0{,}3}} = 10\text{s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{30^2}{2} = 450\text{m/s}^2 \text{ ; } \quad a_\tau = |\ddot{s}| = 0{,}6t = 0{,}6.10 = 6\text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{450^2 + 6^2} = 150{,}04\text{m/s}^2$$

2.Tính chất chuyển động :

Khi t = 10s thì $\overline{v}.\overline{a}_\tau > 0$ do đó điểm chuyển động nhanh dần.

5.4.Bài tập chương 5

5.1. Một xe chuyển động trên đường tròn bán kính R = 400m với vận tốc ban đầu v_0 = 18km/h. Xe bắt đầu chuyển động nhanh dần đều và một phút sau xe đạt được vận tốc 72km/h. Tìm các gia tốc tiếp, gia tốc pháp, gia tốc toàn phần của xe và đoạn đường mà xe đi được sau 20 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động.

<u>*ĐS:*</u> *$a_\tau = 0,25m/s^2$; $a_n = 0,25m/s^2$; $a = 0,25\sqrt{2}\ m/s^2$; S = 150m.*

5.2. Đầu búa máy rơi từ độ cao h = 2,5m, thời gian để búa đi lên gấp đôi thời gian rơi xuống. Tìm số lần đập của búa trong 1 phút. Cho búa rơi tự do với g = $9,81m/s^2$.

<u>*ĐS:*</u> *28 lần*

5.3. Một đầu búa đập vào cọc, sau đó chuyển động cùng với cọc trong thời gian 0,02 giây mới dừng hẳn ; cọc đã nhấn sâu xuống đất được 6cm. Hãy xác định vận tốc ban đầu của cọc, coi rằng nó chuyển động chậm dần đều.

<u>*ĐS:*</u> *V_0 = 6m/s*

5.4. Một bánh đà bắt đầu rời khỏi vị trí yên tĩnh quay với gia tốc góc không đổi Qua 10 phút đầu sau khi bắt đầu chuyển động nó có vận tốc góc bằng 120 vg/ph. Hỏi bánh đà đó quay được bao nhiêu vòng trong 10 phút đó ?

<u>*ĐS:*</u> *N = 600 vòng*

CHƯƠNG 6
CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

Yêu cầu :

* Thấy được tịnh tiến và quay là những chuyển động cơ bản. Nắm chắc định nghĩa và tính chất để nhận biết được các chuyển động đó trong thực hành.

* Nắm vững tính chất của chuyển động tịnh tiến.

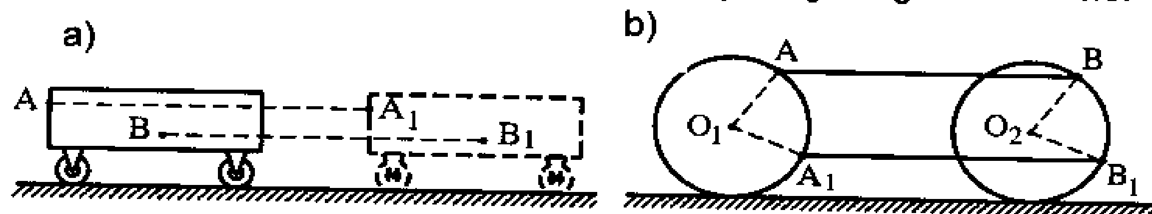
* Nắm vững các yếu tố đặc trưng cho chuyển động quay, ý nghĩa và cách xác định chúng. Cách xác định vận tốc và gia tốc của điểm thuộc vật quay.

* Giải thành thạo các bài toán tìm các yếu tố chuyển động của vật quay và của điểm trên vật trong các bài toán cơ cấu truyền động đơn giản.

6.1. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

6.1.1. Định nghĩa

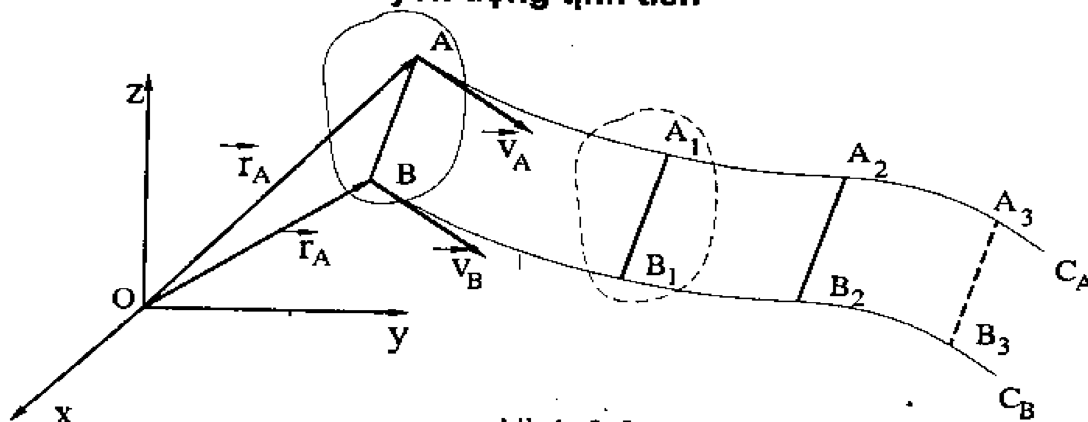
Chuyển động tịnh tiến của vật rắn là chuyển động sao cho một đoạn thẳng bất kỳ thuộc vật luôn luôn chuyển đông song song với chính nó.



Hình 6-1

Chuyển động của xe dao trên máy tiện, xe chạy trên đoạn đường thẳng, vật nặng nâng lên hay hạ xuống theo phương thẳng đứng bằng cần trục v.v...là chuyển động tịnh tiến thẳng. (Hình 6-1a). Thanh truyền AB thực hiện chuyển động tịnh tiến cong (Hình 6-1b) .

6.1.2. Tính chất của chuyển động tịnh tiến



Hình 6-2

Định lý : Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến mọi điểm thuộc vật đều vẽ nên những quỹ đạo đồng nhất và ở mỗi thời điểm chúng có vận tốc và gia tốc như nhau.

Từ định lý trên ta thấy rằng khảo sát một vật tịnh tiến chỉ cần khảo sát một điểm bất kỳ của nó (mọi điểm khác có chuyển động đồng nhất).

Vấn đề và phương pháp khảo sát chuyển động của điểm đã trình bày ở chương 5.

6.2. Chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định

6.2.1. Chuyển động của vật

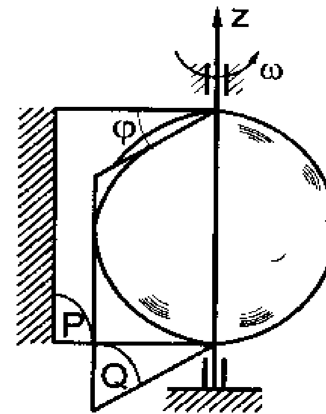
a) Phương trình chuyển động của vật

Vị trí của vật được xác định bởi góc φ được tính bằng rad là góc giữa mặt phẳng P cố định và mặt phẳng Q gắn liền với vật quay (hai mặt phẳng này đều chứa trục quay) với chiều quay dương được định trước. Khi vật quay góc φ thay đổi theo thời gian nên φ là một hàm số theo thời gian (Hình 6-3)

$$\varphi = f(t) \qquad (6\text{-}1)$$

(6-1) là phương trình chuyển động của vật quay.

Đơn vị cuả góc quay thường được tính bằng rađian, ký hiệu rad.



Hình 6-2

Góc 2π rad còn được qui định gọi là vòng ký hiệu vg, vì thế góc quay còn được tính theo số vòng quay N và góc quay φ tính theo rad tương ứng với số vòng quay N là : $\varphi = 2\pi N$

Để biểu diễn chiều quay của vật người ta quy ước :

$\varphi > 0$ nếu từ (P) đến (Q) vật quay ngược chiều kim đồng hồ, ngược lại là $\varphi < 0$

b) Vận tốc góc

Để biểu thị tốc độ quay và chiều quay của vật ta đưa ra khái niệm vận tốc góc ω :

$$\overline{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t) \qquad (6\text{-}2)$$

$\overline{\omega} > 0$: vật quay theo chiều dương

$\overline{\omega} < 0$: vật quay theo chiều âm

Đơn vị của ω là rad/s, trong kỹ thuật còn dùng đơn vị đo vòng/phút, khi đổi ra đơn vị rad/s, chúng ta có : $\omega = \frac{n\pi}{30} rad/s$ (6-3)

trong đó n là số vòng quay trong một phút.

c) Gia tốc góc

Gọi đại lượng $\overline{\varepsilon}$ biểu thị cho sự thay đổi của $\overline{\omega}$ theo thời gian là gia tốc góc của vật.

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \dot{\overline{\omega}} = \ddot{\varphi} \quad (6\text{-}4)$$

Đơn vị đo của gia tốc góc ε là rad/s² (1/s²)

d) Tính chất chuyển động

$\overline{\omega}.\overline{\varepsilon} > 0$: vật quay nhanh dần

$\overline{\omega}.\overline{\varepsilon} < 0$: vật quay chậm dần

e) Các chuyển động quay đặc biệt :

a. Quay đều : $\omega = const$ thì $\varepsilon = 0$; $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ (6-5)
   Trong đó φ_0 là góc quay ban đầu của vật.

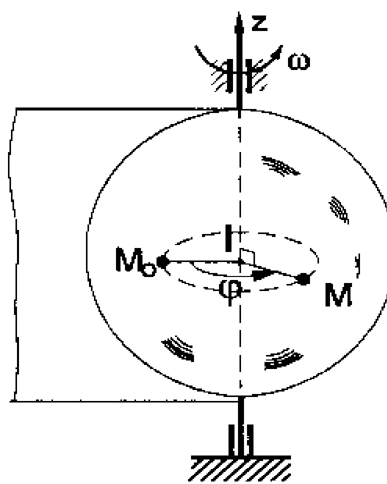
b. Quay biến đổi đều :

$$\varepsilon = const\ ;\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t\ ;\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \quad (6\text{-}6)$$

Trong đó dấu (+) ứng với quay nhanh dần đều, dấu (-) ứng với quay chậm dần đều.

6.2.2. Khảo sát chuyển động của điểm thuộc vật

a) Quỹ đạo và phương trình chuyển động



Hình 6-4

Xét điểm M bất kỳ thuộc vật (Hình 6-4). khoảng cách từ M tới trục quay không đổi bằng R = const. Vậy M chuyển động tròn quanh tâm O, bán kính R, trong mặt phẳng vuông góc với trục quay z. Dùng phương pháp tọa độ tự nhiên để khảo sát chuyển động của điểm M.

Phương trình chuyển động của điểm M là :

$$\overline{s} = R.\overline{\varphi}(t) \quad (6\text{-}7)$$

b) Vận tốc của điểm

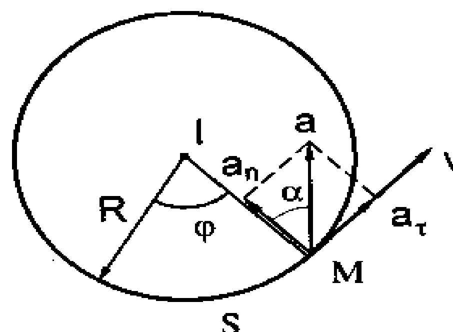
- Phương : thẳng góc với bán kính IM
- Chiều : thuận chiều quay của vật
- Trị số : $v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$ (6-8)

d) Gia tốc của điểm

Điểm M thực hiện chuyển động tròn, nên gia tốc của nó gồm hai thành phần :

* gia tốc tiếp tuyến $\vec{a}_\tau$,
* gia tốc pháp tuyến $\vec{a}_n$ (Hình 6-5)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$



Hình 6-5

Trong đó $\vec{a}_\tau$ có :

- Phương vuông góc với bán kính IM
- Chiều : thuận chiều ε
- Trị số : $a_\tau = R\varepsilon$ (6-9)

$\vec{a}_n$ có :

- Phương dọc theo bán kính I
- Chiều hướng vào trục quay
- Trị số : $a_n = R\omega^2$ (6-10)

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (6\text{-}11)$$

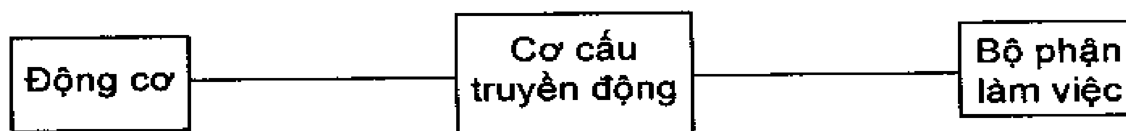
$$tg\alpha = \frac{|a_\tau|}{|a_n|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (6\text{-}12)$$

Như vậy, gia tốc các điểm M bất kỳ thuộc vật đều nghiêng góc α với bán kính IM.

6.3. Truyền động đơn giản

6.3.1. Vị trí truyền động

Trong một máy hoặc một tổ hợp máy thường gồm ba phần (Hình 6-6)



Hình 6-6

6.3.2. Vài loại truyền động đơn giản :

a) Truyền động bằng cơ cấu bánh răng, đai truyền, xích

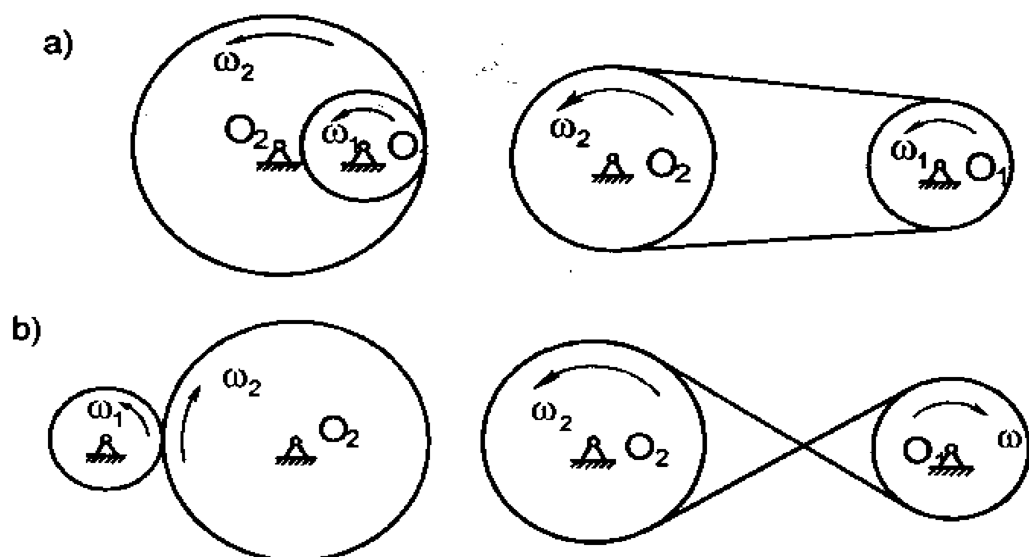
Truyền chuyển động quay quanh một trục cố định qua tiếp xúc và bỏ qua hiện tượng trượt. Tỷ số truyền i :

$$i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{D_2}{D_1} = \pm\frac{z_2}{z_1} \quad (6\text{-}13)$$

D – là đường kính bánh truyền động ; z - số răng của bánh răng

Dấu + : ăn khớp trong hoặc đai bắt thẳng (Hình 6-7a)

Dấu - : ăn khớp ngoài hoặc đai bắt chéo (Hình 6-7b)



Hình 6-7

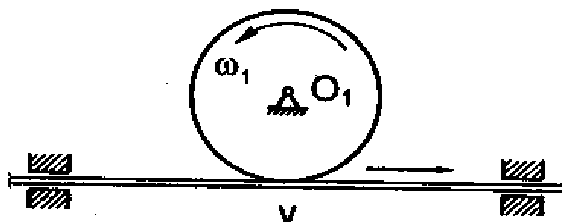
b) Truyền động giữa vật quay quanh trục cố định và vật tịnh tiến bằng bánh răng - thanh răng hay bánh ma sát - thanh ma sát

(Hình 6-8)

Vận tốc vật tịnh tiến : $v = R.\omega$ (6-14)

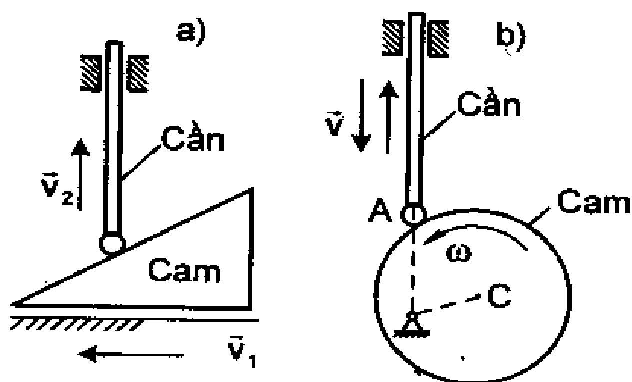
ω - vận tốc góc vật quay, R - bán kính bánh truyền động

Hình 6-8



c) Truyền động bằng cơ cấu cam

Để truyền chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến hoặc chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến chúng ta có thể sử dụng các cơ cấu cam như hình 6-9

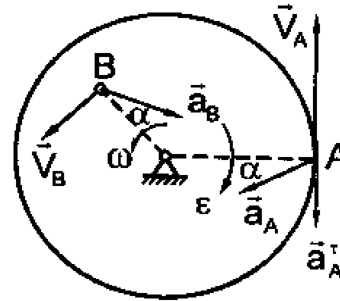


Hình 6-9

Ví dụ 6-1:

Một vật quay quanh trục cố định. Ở thời điểm khảo sát, điểm A cách trục quay khoảng R = 0,5m có vận tốc v = 2 m/s và gia tốc toàn phần là $8\sqrt{3}$ m/s^2

- Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của vật.
- Tìm vận tốc và gia tốc điểm B cách trục quay một khoảng r = 0,2m (Hình 6-10)



Hình 6-10

Giải :

- Vận tốc góc của trục:

$$\omega = \frac{v_A}{R} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ rad/s.}$$

Để tìm gia tốc góc của vật, phải biết :

gia tốc pháp tuyến của điểm A: $a_A^n = R.\omega^2 = 0,5.4^2 = 8 \text{ m/s}^2$

gia tốc tiếp tuyến của điểm A

$$a_A^\tau = \sqrt{a_A^2 - (a_A^n)^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 8^2} = 8\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

Từ (6-9) : $$\varepsilon = \frac{a_A^\tau}{R} = \frac{8\sqrt{2}}{0,5} = 16\sqrt{2} \text{ rad/s}^2$$

Căn cứ $\vec{a}_A$ đã cho : $\overline{\varepsilon}$ có chiều ngược $\overline{\omega}$, vậy lúc khảo sát vật quay chậm dần .

- Vận tốc điểm B : $v_B = r.\omega = 0,2.4 = 0,8$ m/s

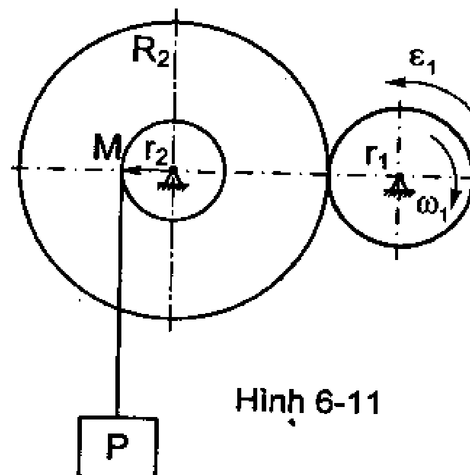
gia tốc điểm B : $a_B^\tau = r.\varepsilon = 0,2.16\sqrt{2} = 3,2\sqrt{2}$ m/s^2

$$a_B^n = r.\omega^2 = 0,2.4^2 = 3,2 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{(3,2\sqrt{2})^2 + 3,2^2} = \frac{16\sqrt{3}}{5} \text{ m/s}^2$$

Ví dụ 6-2:

Cơ cấu truyền động như hình 6-11. Trục I có bán kính R_1 chuyển động quay với vận tốc góc ω_1 và gia tốc góc ε_1. Trục II gồm hai tầng có bán kính tương ứng R_2 và r_2. Tìm vận tốc và gia tốc của vật P.



Hình 6-11

Giải :

Hệ gồm có trục I và trục II chuyển động quay, vật P chuyển động tịnh tiến.

Theo trên chúng ta có:

$$\frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2} = \frac{\overline{\varepsilon}_1}{\overline{\varepsilon}_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Do đó: $\overline{\omega}_2 = -\frac{R_1}{R_2}.\overline{\omega}_1$; $\overline{\varepsilon}_2 = -\frac{R_1}{R_2}.\overline{\varepsilon}_1$

Vận tốc điểm P: $v_P = v_M = r_2.\omega_2 = \frac{r_2.R_1}{R_2}.\omega_1$

Gia tốc điểm P: $a_P = a_M^{\tau} = r_2.\varepsilon_2 = \frac{r_2.R_1}{R_2}.\varepsilon_1$

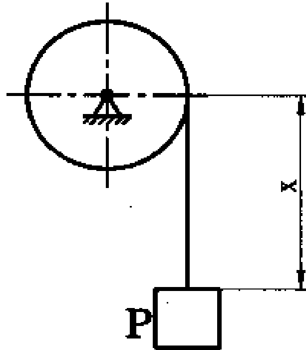
Do ω_1 và ε_1 ngược chiều nhau (Hình 6-11), $\vec{v}_P$ và $\vec{a}_P$ ngược chiều nhau nên vật P chuyển động lên chậm dần

6.4. Bài tập chương 6

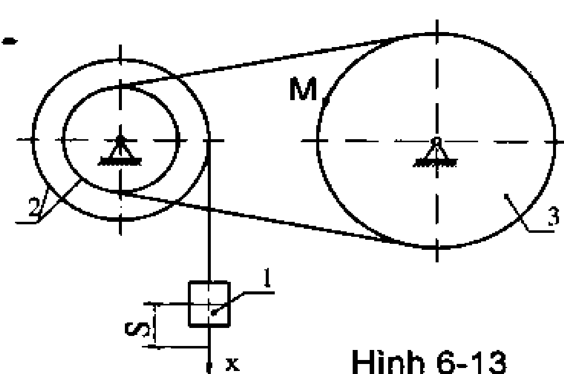
6.1. Trục có bán kính R = 10cm chuyển động được là do vật P rơi xuống theo luật: $x = 100t^2$ (x: cm ; t: s). Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của trục và gia tốc toàn phần của một điểm nằm trên vành trục (Hình 6-12)

<u>ĐS</u> : $\omega = 20t$ *rad/s* ; $\varepsilon = 20$ *rad/s²* ; $a = 200\sqrt{1+400t^4}\ cm/s^2$

6.2. Cho cơ cấu như hình 6-13. Vật 1 chuyển động tịnh tiến theo luật $x = 60t^2$ (s: cm; t: s). Các bánh có bán kính: r_2 = 20cm ; R_2 = 100cm ; R_3 = 30cm. Hãy xác định vận tốc, gia tốc pháp, gia tốc tiếp và gia tốc toàn phần của điểm M thuộc cơ cấu ở thời điểm vật 1 di chuyển xuống được quãng đường s = 0,5m.



Hình 6-12



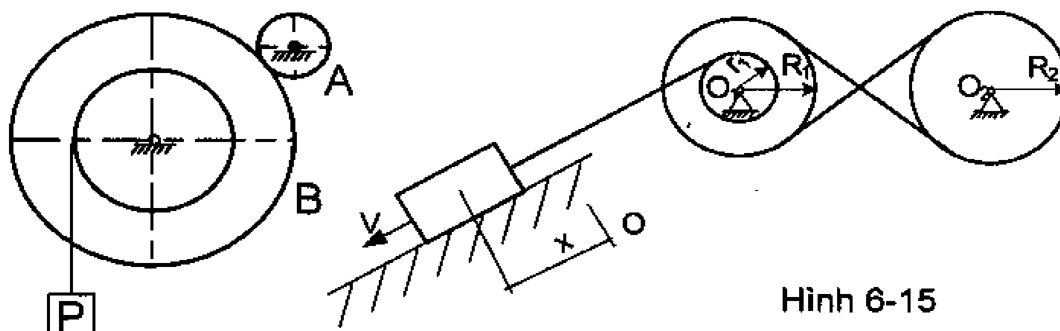
Hình 6-13

6.3. Bánh răng A có số răng Z_A = 12 quay đều với vận tốc gốc 120 v/ph, bánh B có số răng 72 lắp cùng trục với tời có bán kính R = 15cm. Tìm số vòng bánh răng A quay được tương ứng với quãng đường vật nặng đi lên 15m và thời gian tương ứng để nâng vật nặng (Hình 6-17).

<u>ĐS</u> : N_A = 95,54 vòng ; T = 47,77s.

6.4. Vật nặng chuyển động trên mặt phẳng nghiêng theo luật $x = 2 + 70t^2$ (x:cm; t:s) bằng cơ cấu dây quấn quanh trục tời đồng trục với bánh đai 1, truyền động theo sơ đồ hình 6-15. Biết R_1 = 50cm; r_1 = 30cm; R_2 = 60cm. Tìm ω, ε của bánh 2, vận tốc và gia tốc của điểm M nằm cách tâm trục O_2 một đoạn bằng 40cm lúc vật di chuyển được một đoạn 40cm; bỏ qua ma sát giữa vật và mặt nghiêng (Hình 6-15).

<u>ĐS</u> : $\omega_2 = 2,87 rad/s$; $\varepsilon_2 = 3,89 rad/s^2$;
$v_M = 114,8 cm/s$; $a_M = 364,37 cm/s^2$.



Hình 6-14

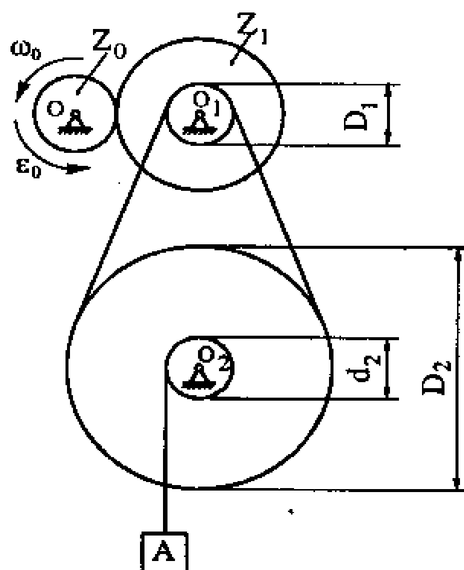
Hình 6-15

6.5. Cơ cấu truyền động bằng bánh răng và dây đai (Hình 6-16). Bánh răng lắp trên trục O và trục O_1 có Z_O = 18, Z_1 = 36. Bánh đai lắp trên trục 1 có đường kính D_1, bánh đai lắp trên trục 2 có đường kính D_2, tang quấn dây buộc vật A lắp trên trục 2 có đường kính d_2.

Cho $D_1 = d_2 = D_2/4 = 100$cm.

Tìm vận tốc và gia tốc của vật nặng A tại thời điểm trục 1 quay với vận tốc góc ω_0 ; gia tốc góc ε_0.

Hình 6-16



CHƯƠNG 7
HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

Yêu cầu :

* Hình dung được bài toán hợp chuyển động của điểm, thấy vấn đề được đặt ra trong đó.

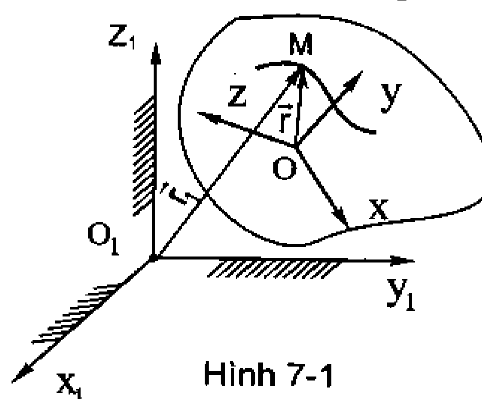
Quan niệm rành mạch và rỏ ràng về các chuyển động.

* Nắm vững định nghĩa, phương pháp và xác định thành thạo các vận tốc, gia tốc trong các chuyển động.
* Hiểu thấu đáo các định lý hợp vận tốc và gia tốc trong các trường hợp, sử dụng thành thạo để giải các bài toán hợp và phân chuyển động.

7.1.Khái niệm

7.1.1. Mô hình bài toán

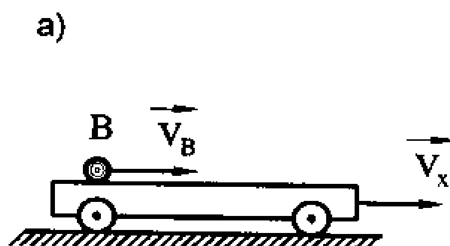
Điểm M chuyển động đối với hệ quy chiếu động Oxyz (hệ này được gắn liền với vật rắn nào đó). Hệ quy chiếu động Oxyz chuyển động đối với hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$. Vấn đề đặt ra là khảo sát chuyển động của điểm M đối với hệ quy chiếu $O_1x_1y_1z_1$ đây là bài toán hợp chuyển động của điểm (Hình 7-1).



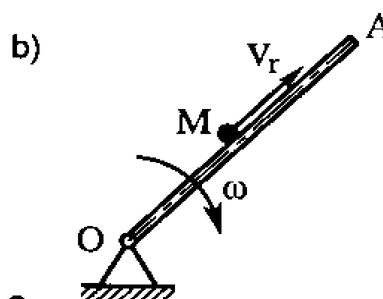
Hình 7-1

Ví dụ: quả bóng lăn trên sàn tàu, trong khi toa tàu đang chuyển so với đường ray (Hình 7-2a); hay động điểm M chuyển động trên thanh OA, trong khi thanh OA quay quanh tâm O cố định (Hình 7-2b).

a)



b)



Hình 7-2

7.1.2. Các định nghĩa

a) Chuyển động tuyệt đối (absolute): là chuyển động của điểm M so với hệ cố định $O_1x_1y_1z_1$, tương ứng có quỹ đạo tuyệt đối, vận tốc tuyệt đối $\vec{V}_a$, gia tốc tuyệt đối $\vec{a}_a$.

b) Chuyển động tương đối (relative): là chuyển động của điểm M so với hệ quy chiếu động Oxyz, tương ứng có quỹ đạo tương đối, vận tốc

tương đối $\vec{V}_r$, gia tốc tương đối $\vec{a}_r$.

c) Chuyển động theo (to elope): là chuyển động của hệ động Oxyz cùng với phần không gian gắn với nó so với hệ cố định $O_1x_1y_1z_1$, tương ứng có quỹ đạo theo, vận tốc theo $\vec{V}_e$, gia tốc theo $\vec{a}_e$.

• *Trùng điểm của động điểm M ở thời điểm khảo sát là điểm M** của hệ động trùng với điểm M lúc ấy. Vì vậy quỹ tích các trùng điểm chính là quỹ đạo tương đối của động điểm trong hệ quy chiếu động. Chuyển động của trùng điểm M* được quyết định bởi chuyển động của chính hệ động.

Vận tốc, gia tốc tuyệt đối của trùng điểm M* tại thời điểm khảo sát (tính toán trong hệ quy chiếu cố định) chính là vận tốc và gia tốc theo.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{M^*} ; \ \vec{a}_e = \vec{a}_{M^*}$$

7.2. Các định lý hợp vận tốc và hợp gia tốc

7.2.1. Định lý hợp vận tốc

Ở mỗi thời điểm vận tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học của vận tốc tương đối và vận tốc theo.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \qquad (7\text{-}1)$$

7.2.2. Định lý hợp gia tốc

Ở mỗi thời điểm gia tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học của gia tốc tương đối, gia tốc theo và gia tốc Côriôlit ($\vec{a}_C$).

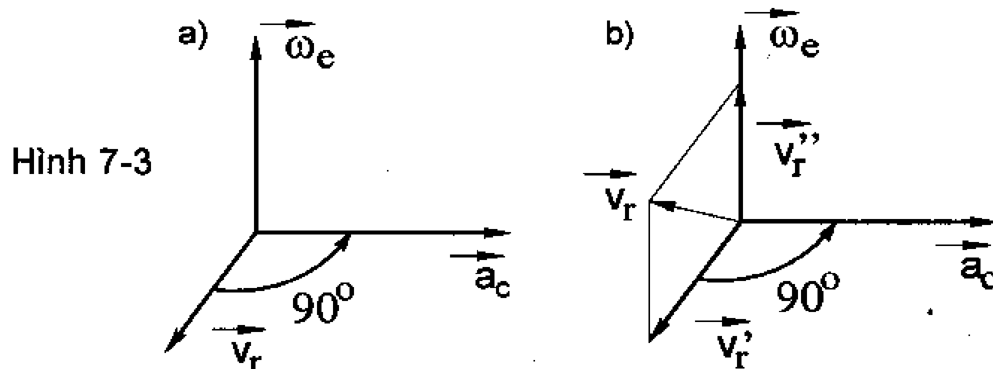
$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C \qquad (7\text{-}2)$$

Khi hệ động Oxyz chuyển động tịnh tiến : $\vec{a}_C = 0$;

khi đó $$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e \qquad (7\text{-}3)$$

Khi hệ động Oxyz chuyển động quay quanh một trục cố định với vận tốc góc $\vec{\omega}_e$ thì $\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$

Chú ý. Khi làm bài tập chúng ta sử dụng quy tắc thực hành để xác định gia tốc Côriôlit như sau:



Hình 7-3

* Trường hợp $\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r$ (bài toán phẳng). Chúng ta quay $\vec{V}_r$ trong mặt phẳng vuông góc với $\vec{\omega}_e$ một góc 90^0 theo chiều quay của $\vec{\omega}_e$ ta sẽ được hướng của $\vec{a}_C$, trị số $a_C = 2\omega_e.V_r$ (Hình 7-3a)

* Trường hợp $\vec{\omega}_e$ không vuông góc với $\vec{V}_r$ (bài toán không gian). Chúng ta chiếu $\vec{V}_r$ lên mặt phẳng vuông góc với $\vec{\omega}_e$ được $\vec{V}'_r$, sau đó quay $\vec{V}'_r$ một góc 90° theo chiều quay của hệ quy chiếu động chúng ta được phương và chiều của $\vec{a}_C$ (Hình 7-3b),

$$a_C = 2\omega_e.V'_r = 2\omega_e.V_r.\sin\alpha \qquad (7\text{-}4)$$

7.3. Phương pháp giải và các ví dụ áp dụng

Phương pháp giải

1. Phân tích chuyển động: Phân tích dạng chuyển động của các vật cấu thành hệ được khảo sát, hệ trục động gắn trên vật chuyển động, hệ trục cố định gắn trên vật cố định hoặc không gian cố định. Sau đó phân tích các chuyển động thành phần.

- Chuyển động tuyệt đối và chuyển động tương đối : dạng chuyển động (thẳng hoặc cong) và các yếu tố động học đặc trưng chuyển động (vận tốc, gia tốc).
- Chuyển động theo: dạng chuyển động (tịnh tiến, quay quanh một trục cố định, song phẳng...) trong trường hợp chuyển động theo không phải là tịnh tiến cần xác định được trục quay và vectơ vận tốc góc của chuyển động theo $\vec{\omega}_e$.

2. Giải

a) Bài toán tìm phương trình chuyển động: xét điểm ở vị trí bất kỳ. Để viết phương trình chuyển động tuyệt đối cần tìm quan hệ giữa các toạ độ của điểm trong hệ toạ độ cố định theo thời gian, còn đối với phương trình chuyển động tương đối cần tìm quan hệ giữa các toạ độ của điểm trong hệ toạ độ động theo thời gian.

b) Bài toán tổng hợp hoặc phân tích chuyển động:

Tìm vận tốc:

- Viết biểu thức vận tốc (7-1). Xác định phương chiều, trị số các vận tốc.
- Vẽ hoạ đồ vectơ vận tốc. Đối với các vectơ chưa biết chiều thì giả định chiều, nếu kết quả giải ra âm thì lấy chiều ngược với chiều giả định. Xác định ẩn số phương trình (7-1).
- Giải phương trình vectơ (7-1) để tìm trị số các thành phần vận tốc chưa biết. Có thể dùng phương pháp vẽ hoặc chiếu hai vế của (7-1) lên hai trục bất kỳ vuông góc nhau.

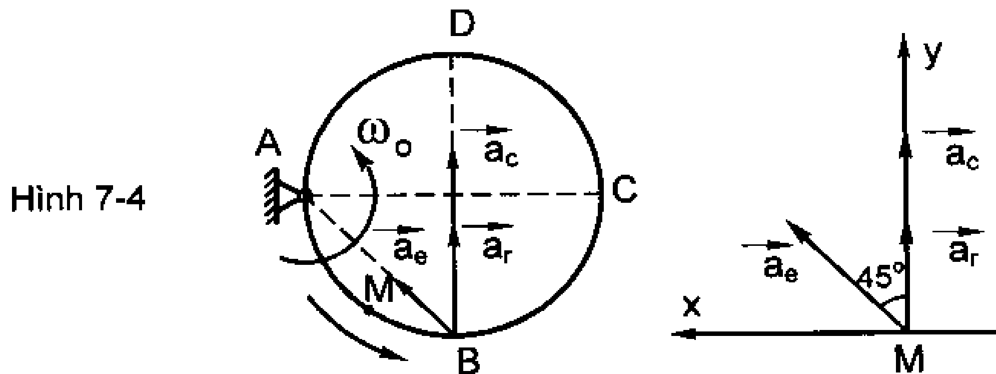
Tìm gia tốc:

- Viết biểu thức gia tốc dạng (7-3) nếu chuyển động theo là tịnh tiến; dạng

(7-2) nếu chuyển động theo không phải là tịnh tiến. Xác định phương chiều, trị số các gia tốc. Xác định ẩn số phương trình (7-2) hoặc (7-3).
- Vẽ hoạ đồ vectơ gia tốc. Đối với các vectơ chưa biết chiều thì giả định chiều và xử lý như bài toán vận tốc.

Ví dụ 7-1 :

Đĩa tròn bán kính R quay đều với vận tốc góc ω_0 quanh A trong mặt phẳng chứa nó. Điểm M chuyển động theo vành đĩa với vận tốc u không đổi. Tìm gia tốc tuyệt đối của nó khi nó chạy đến điểm B (Hình 7-4)



Hình 7-4

Giải :

Chọn hệ động là đĩa tròn, nó quay quanh A với $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0$ hướng vuông góc với mặt phẳng đĩa.

Phân tích chuyển động của điểm M khi nó ở vị trí B. Điểm B chính là trùng điểm của M nên : $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$

Vì hệ động quay đều nên $\vec{a}_e^\tau = 0$

vậy $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n$ hướng từ B vào A và : $a_e = R\sqrt{2}.\omega_0^2$

Điểm M chuyển động tương đối tròn đều theo vành đĩa nên : $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n$

hướng từ B vào O và $a_r = \dfrac{u^2}{R}$

Do $\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r (\vec{V}_r = \vec{u})$ nên gia tốc $\vec{a}_C$ hướng từ B vào O và : $a_C = 2u.\omega_0$

Áp dụng (7-3) ta có : $\vec{a}_M = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$ (1)

Chiếu hai vế của (1) lên hệ trục tọa độ Mxy được :

$a_{Mx} = a_e \cos 45^0 = R\omega_0^2$

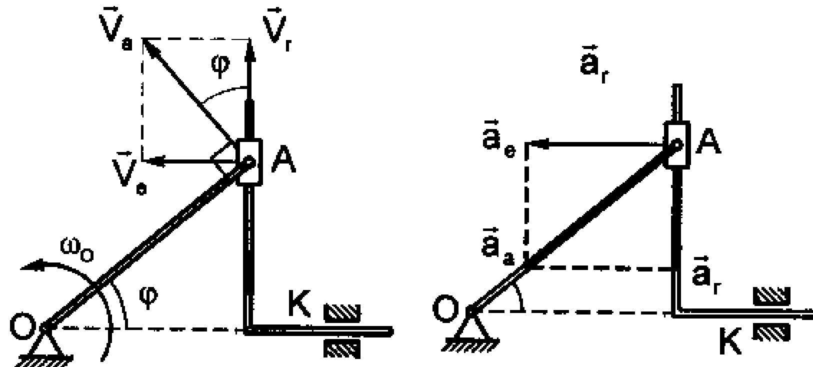
$a_{My} = a_e \sin 45^0 + a_r + a_C = R\omega_0^2 + \dfrac{u^2}{R} + 2u\omega_0$

Vậy : $a_M = \sqrt{R^2\omega_0^4 + (R\omega_0^2 + \dfrac{u^2}{R} + 2u\omega_0)^2}$

Ví dụ 7-2 :

Tay quay OA có chiều dài l quay quanh trục cố định O với vận tốc góc ω_0 = const làm cho cần K trượt theo phương ngang. Tìm vận tốc và gia tốc của cần K cũng như vận tốc và gia tốc của con trượt A đối với cần K. Cho biết tại vị trí đang xét $\varphi = 30^0$ (Hình 7-5).

Hình 7-5



Giải :

1. Phân tích chuyển động :

Con trượt A là vật điểm khảo sát. Cần K là hệ động, giá O là hệ cố định.

- Chuyển động của điểm A đối với cần K là chuyển động tương đối. Đó là chuyển động tịnh tiến theo phương thẳng đứng.
- Chuyển động của máng K đối với giá là chuyển động theo. Đó là chuyển động tịnh tiến theo phương ngang.
- Chuyển động của điểm A đối với giá là chuyển động tuyệt đối. Đó là chuyển động tròn đều trên đường tròn tâm O, bán kính OA.

2. Vận tốc : Từ định lý hợp vận tốc, ta có : $\vec{V}_A = \vec{V}_e + \vec{V}_r$

Các véc tơ vận tốc được biểu diễn như trên hình 7-5. Trong đó $\vec{V}_A$ đã được hoàn toàn xác định cả phương chiều và giá trị; các véc tơ $\vec{V}_r$ và $\vec{V}_e$ chỉ biết được phương, còn chiều và giá trị chưa được xác định.

Để tìm giá trị V_e và V_r có thể sử dụng phương pháp vẽ, tính được :

$$V_r = V_A \cos\varphi = \frac{1}{2}\omega_o; \quad V_e = V_A \sin\varphi = \frac{l\sqrt{3}}{2}\omega_o$$

$\vec{V}_r$ là vận tốc của con trượt A đối với cần K, còn $\vec{V}_e$ chính là vận tốc của cần K (tại thời điểm khảo sát).

3. Gia tốc : Từ định lý hợp gia tốc, ta có : $\vec{a}_A = \vec{a}_e + \vec{a}_r$

Trong đó $\vec{a}_A$ có phương OA, chiều hướng từ A về O và có giá trị : $a_A = l\omega_0^2$

Vì chuyển động tương đối là chuyển động thẳng nên $\vec{a}_r$ có cùng phương với $\vec{V}_r$ còn chiều và giá trị chưa được xác định. Vì cần K tịnh tiến ngang nên $\vec{a}_e$ có phương ngang, chiều và giá trị chưa được xác định.

Các véc tơ gia tốc được biểu diễn như hình 7-5.

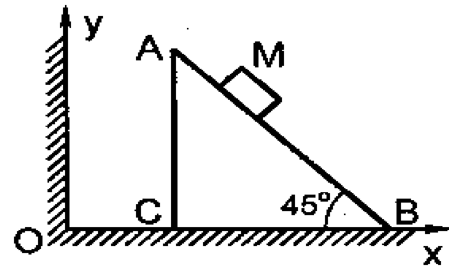
Để xác định giá trị các véc tơ gia tốc $\vec{a}_e$ và $\vec{a}_r$ chúng ta có thể dùng phương pháp vẽ tìm được :

$$a_e = a_A \cos 60^0 = \frac{1}{2}\omega_0^2; \quad a_r = a_A \sin 60^0 = \frac{l\sqrt{3}}{2}\omega_0^2$$

Chiều của các véc tơ $\vec{a}_e$, $\vec{a}_r$ được chỉ ra trên hình vẽ. Tại thời điểm khảo sát con trượt chuyển động chậm dần và cần K tịnh tiến nhanh dần về phía phải.

7.4. Bài tập chương 7

7.1. Mặt nghiêng AB chuyển động tịnh tiến thẳng theo trục Ox với gia tốc không đổi 0,1m/s². Trên AB có vật M trượt xuống với gia tốc tương đối không đổi $0,1\sqrt{2}$ m/s². Vận tốc đầu của mặt nghiêng và vật đều bằng không. Vị trí đầu của vật có tọa độ x = 0. Xác định vận tốc và gia tốc tuyệt đối của vật (Hình 7-6).

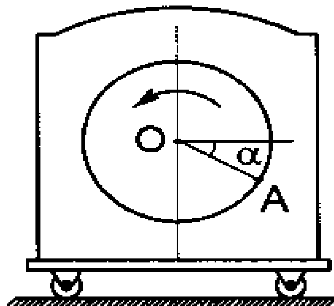


Hình 7-6

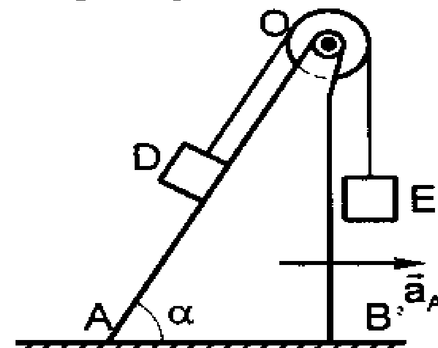
ĐS: $V = 0,1\sqrt{5}t$ m/s ; $a = 0,1\sqrt{5}$ m/s²

7.2. Xe chuyển động nằm ngang, hướng sang phải với gia tốc a = 49,2cm/s². Trên xe đặt một mô tơ điện rô to của nó quay theo quy luật $\varphi = t^2$. Bán kính rô to r = 20cm. Xác định gia tốc tuyệt đối của điểm A nằm trên vành rô to tại thời điểm t = 1s, nếu tại vị trí này góc $\alpha = 30^0$ (Hình 7-7).

ĐS: a_A = 74,6cm/s² và hướng thẳng đứng lên trên.



Hình 7-7



Hình 7-8

7.3. Lăng trụ tam giác OAB chuyển động tịnh tiến trên mặt ngang với gia tốc $a_A = 3m/s^2$. Dọc theo mặt nghiêng vật D trượt xuống theo luật $s = 2t^2$ (s : m ; t : s), nhờ liên kết dây vòng qua ròng rọc O làm vật E chuyển động theo phương thẳng đứng (Hình 7-8). Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của D và E tại t = 2s, cho $\alpha = 60^0$

<u>*ĐS:*</u> $a_D = 3,6\ m/s^2$; $a_E = 5\ m/s^2$

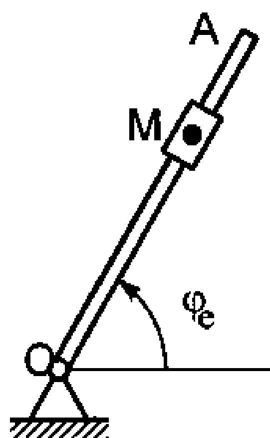
7.4. Một cơ cấu cu lít OA quay quanh trục đi qua O được mô tả bằng phương trình $\varphi = 5t - \frac{1}{2}t^2$. Một con chạy M chuyển động dọc theo rãnh của cu lít với phương trình $S_r = OM = \frac{1}{2}t^3$ (S_r : cm ; t : s). Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của con chạy M tại thời điểm t = 2s (Hình 7-9).

<u>*ĐS:*</u> $V_a = 13,4\ cm/s$; $a_a = 43,86\ cm/s^2$

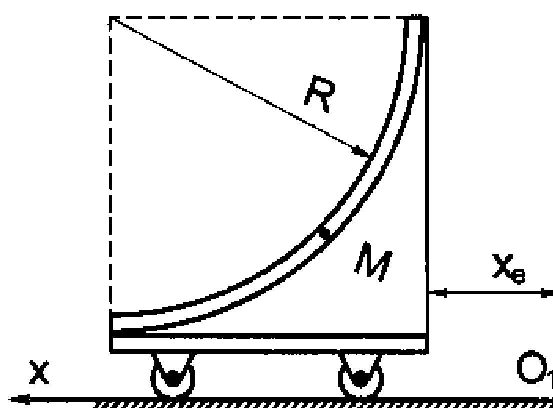
7.5. Vật D chuyển động tịnh tiến theo phương x với phương trình $x = t^3 + 4t$ (cm). Điểm M chuyển động trên cung tròn có bán kính R = 48cm theo luật $OM = S_r = 4\pi t^2$.

Xác định vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M tại thời điểm t = 2s (Hình 7-10).

<u>*ĐS:*</u> $V_a = 64,6\ cm/s$; $a_a = 68,5\ cm/s^2$



Hình 7-9



Hình 7-10

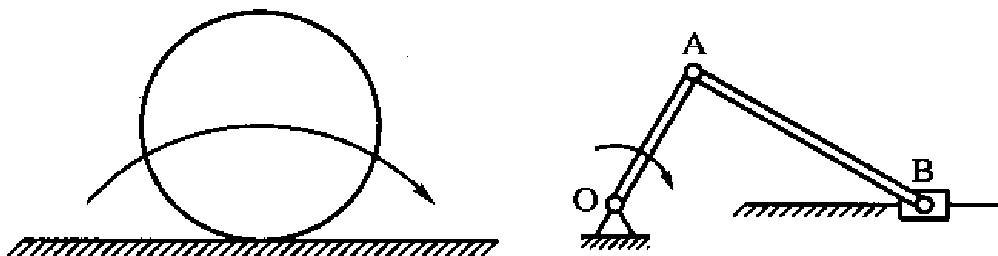
CHƯƠNG 8
CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

Yêu cầu:
- Hiểu rõ dạng của chuyển động song phẳng của vật rắn.
- Nắm vững các công thức xác định vận tốc và gia tốc các điểm thuộc vật song phẳng.

8.1. Định nghĩa và mô hình

8.1.1. Định nghĩa : Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động trong đó mỗi điểm thuộc vật luôn chuyển động trong một mặt phẳng xác định song song với một mặt phẳng cố định.

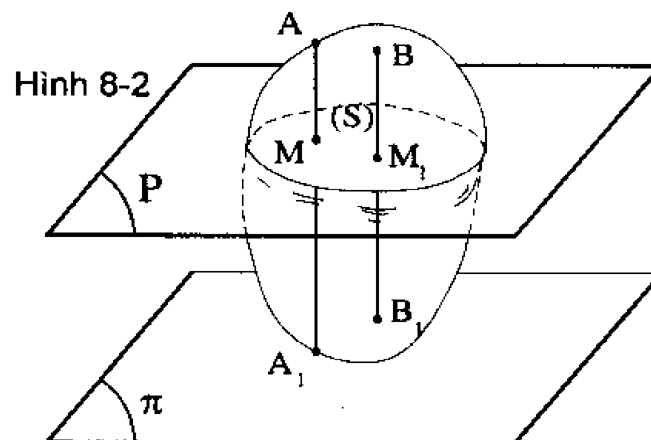
Ví dụ : Bánh xe lăn không trượt trên một đường cong cố định; thanh truyền AB trong cơ cấu tay quay con trượt là thực hiện chuyển động song phẳng (Hình 8-1).



Hình 8-1

8.1.2. Mô hình

Giả sử cho vật rắn chuyển động song phẳng thì theo định nghĩa điểm M bất kỳ thuộc vật chỉ di chuyển trên mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (π) cố định biết trước (Hình 8-2).



Hình 8-2

Mặt phẳng (P) cắt vật rắn tạo thành thiết diện phẳng (S).

Qua M dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt vật rắn tại A và B, đoạn AB chuyển động tịnh tiến. Do vậy chuyển động của mọi điểm thuộc AB giống như chuyển động của

M∈(P). Nếu trên (S) ta lấy điểm M_1 bất kỳ khác và qua M_1 dựng A_1B_1 vuông góc với (P) thì A_1B_1 cũng chuyển động tịnh tiến, mọi điểm trên A_1B_1 chuyển động giống như $M_1 \in (P)$. Tương tự cho M_2, M_3..

Như vậy *"Việc nghiên cứu chuyển động song phẳng của vật rắn chỉ cần nghiên cứu chuyển động của thiết diện (S) trong mặt phẳng (P) mà thôi".*

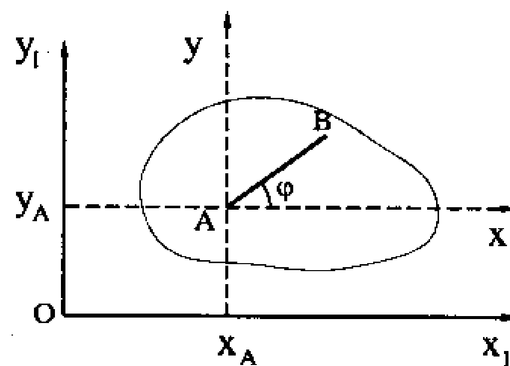
8.2. Chuyển động của vật

8.2.1. Phương trình chuyển động của vật

Chọn điểm A tuỳ ý làm cực, dựng hệ trục Axy chuyển động tịnh tiến đối với hệ trục cố định Ox_1y_1. Vị trí của hình phẳng có thể được xác định nhờ x_A, y_A và φ, trong đó (x_A, y_A) là các tọa độ cực A; φ là góc định vị của một đoạn thẳng AB thuộc hình phẳng đối với hệ trục động Axy (Hình 8-3).

$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases} \qquad (8\text{-}1)$$

(8-1) là phương trình chuyển động của vật song phẳng.



Hình 8-3

Chuyển động song phẳng có thể được phân tích thành hai chuyển động : chuyển động tịnh tiến cùng với hệ trục Axy và chuyển động quay đối với hệ trục Axy.

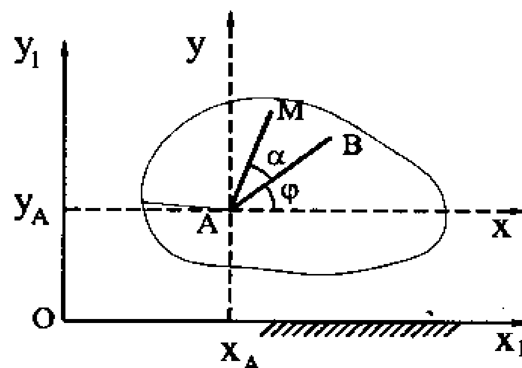
8.2.2. Các yếu tố động học đặc trưng

Các yếu tố động học đặc trưng cho chuyển động hình phẳng :

$$\vec{V}_A, \vec{a}_A, \overline{\omega}, \overline{\varepsilon}.$$

trong đó $\overline{\omega}, \overline{\varepsilon}$ là vận tốc góc và gia tốc góc của hình phẳng trong chuyển động quay đối với hệ trục Axy ; $\vec{V}_A, \vec{a}_A$ là vận tốc và gia tốc cực A.

Hình 8-4



8.3. Chuyển động các điểm thuộc vật

8.3.1. Phương trình chuyển động của điểm thuộc vật

$$\begin{cases} x_M = x_A + MA.\cos(\varphi + \alpha) = g_1(t) \\ y_M = y_A + MA.\sin(\varphi + \alpha) = g_2(t) \end{cases} \quad (8\text{-}2)$$

trong đó : x_A, y_A, φ được tính theo (8-1) còn α là góc giữa hai đoạn thẳng AB và MA (Hình 8-4).

8.3.2. Vận tốc của điểm thuộc vật

▪ **Định lý về quan hệ vận tốc** :

Vận tốc của một điểm thuộc hình phẳng bằng tổng hình học vận tốc của điểm cực và vận tốc của điểm trong chuyển động quay quanh cực (Hình 8-5).

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA} \quad (8\text{-}3)$$

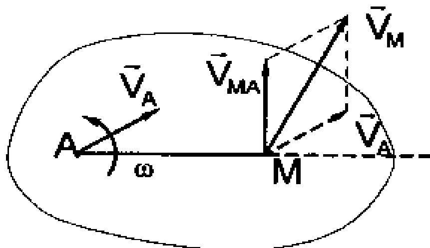
trong đó $\vec{V}_{MA}$ được xác định : $\begin{cases} \text{Phương} \perp MA \\ \text{Chiều thuận chiều } \overline{\omega} \\ \text{Giá trị } V_{MA} = MA.\omega. \end{cases}$

▪ **Định lý hình chiếu vận tốc**

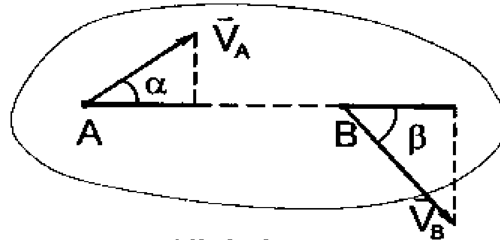
Hình chiếu vận tốc hai điểm bất kỳ thuộc hình phẳng lên phương nối hai điểm thì bằng nhau (Hình 8.6).

$$ch_{AB}\vec{V}_B = ch_{AB}\vec{V}_A \quad (8\text{-}4)$$

hay $V_B\cos\beta = V_A\cos\alpha$



Hình 8-5



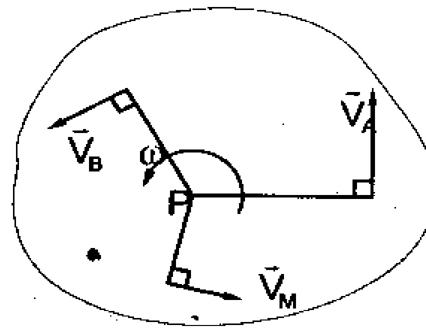
Hình 8.6

▪ **Định lý về sự phân bố vận tốc các điểm thuộc hình phẳng** :

Tại mỗi thời điểm, tồn tại một điểm P thuộc hình phẳng, vận tốc của P bằng không (P được gọi là tâm vận tốc tức thời).

Nếu P giới nội thì vận tốc mọi điểm của hình phẳng được phân bố giống như trường hợp hình phẳng quay (tức thời) quanh P (Hình 8-7),

lúc đó :



Hình 8.7

$V_B = PB.\omega$; $V_A = PA.\omega$; $V_M = PM.\omega$ (8-5)

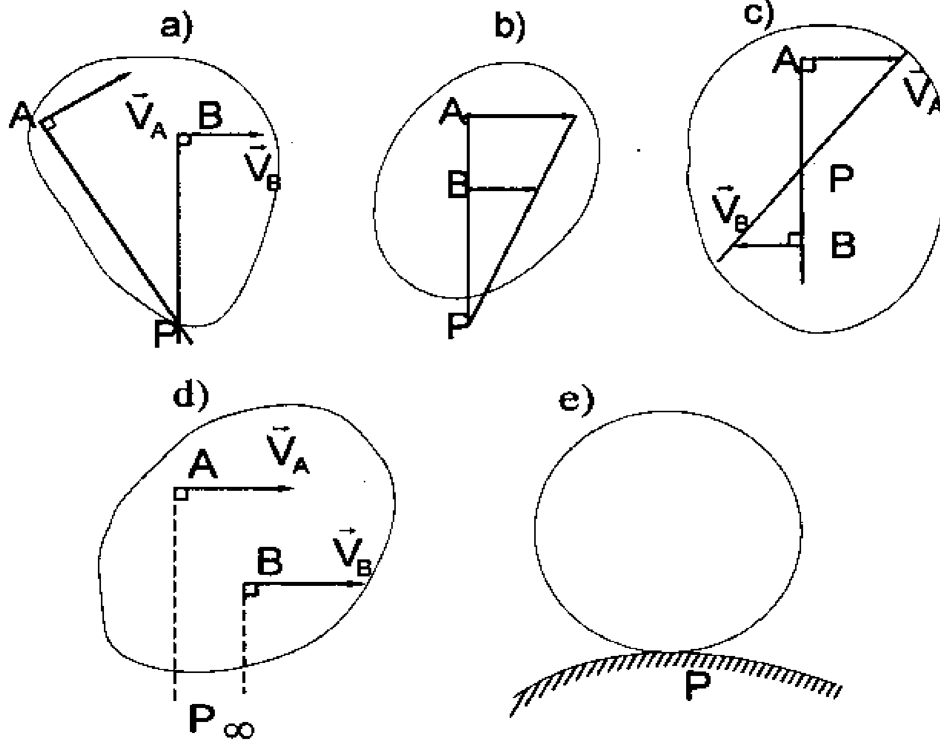
hoặc : $\frac{V_B}{PB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_M}{PM} ... = \omega$ (8-6)

- Nếu P ở vô cùng thì vận tốc mọi điểm của hình phẳng được phân bố giống như trường hợp hình phẳng chuyển động tịnh tiến (tức thời) lúc đó (Hình 8-8d) :

$V_A = V_B = V_M$ và $\omega = 0$

• **Cách xác định tâm vận tốc tức thời** (Hình 8-8)

Hình 8-8a - Biết vận tốc một điểm và phương vận tốc của điểm thứ hai.
Hình 8-8b - Biết vận tốc hai điểm song song và cùng chiều nhau.
Hình 8-8c - Biết vận tốc hai điểm song song và ngược chiều nhau.
Hình 8-8d - Biết vận tốc hai điểm bằng nhau.
Hình 8-8e - Vật phẳng lăn không trượt trên một đường cố định.



Hình 8-8

8.3.3. Gia tốc các điểm thuộc vật

▪ **Định lý về quan hệ gia tốc** :

Gia tốc của điểm M bất kỳ thuộc hình phẳng bằng tổng hình học gia tốc điểm cực A và gia tốc của điểm M trong chuyển động tròn quanh A (Hình 8-9) :

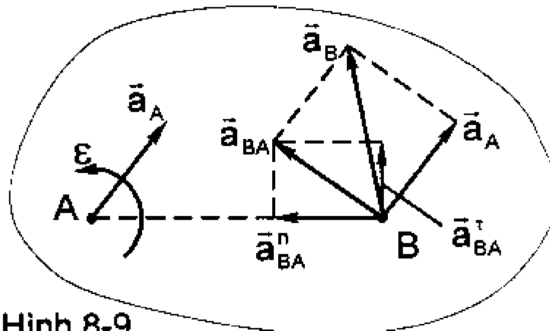
$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{MA} + \vec{a}^\tau_{MA} \quad (8-7)$$

trong đó $\vec{a}^n_{MA}$ được xác định :

$\begin{cases}\text{phương : dọc MA,}\\ \text{chiều : hướng từ M đến A,}\\ \text{giá trị : } a^n_{MA} = MA.\omega^2.\end{cases}$

và $\vec{a}^\tau_{MA}$ được xác định :

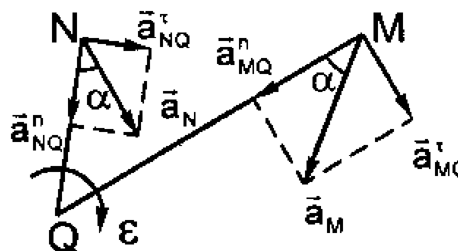
$\begin{cases}\text{phương : thẳng góc với AM,}\\ \text{chiều : thuận chiều } \bar{\varepsilon}\\ \text{giá trị : } a^\tau_{MA} = MA.\varepsilon\end{cases}$



Hình 8-9

- **Định lý về sự phân bố gia tốc các điểm thuộc hình phẳng** :

Tại mỗi thời điểm, tồn tại một điểm Q thuộc hình phẳng, gia tốc của Q bằng không (Q được gọi là tâm gia tốc tức thời) và gia tốc mọi điểm trên hình phẳng được phân bố giống như trường hợp hình phẳng quay (tức thời) quanh Q lúc đó (Hình 8-10)



Hình 8-10

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MQ} = \vec{a}^n_{MQ} + \vec{a}^\tau_{MQ} \qquad (8\text{-}8)$$

trong đó :

$\vec{a}^n_{MQ}$ hướng từ M đến Q và có giá trị $a^n_{MQ} = MQ\omega^2$

$\vec{a}^\tau_{MQ}$ hướng thẳng góc MQ, thuận chiều $\bar{\varepsilon}$ và có giá trị $a^\tau_{MQ} = MQ.\varepsilon$

$\vec{a}_M$ làm với MQ góc α, có $tg\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$

Cần chú ý rằng tâm gia tốc tức thời không trùng với tâm vận tốc tức thời.

- Chú thích :

1. Nếu vận tốc góc của hình phẳng tìm được là hàm của thời gian t : $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$ thì gia tốc góc $\bar{\varepsilon}$ của hình phẳng được tính theo biểu thức:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} \qquad (8\text{-}9)$$

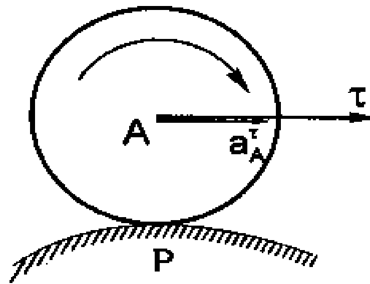
Đặc biệt khi một đĩa tròn lăn không trượt trên một đường cố định (Hình 8-11), tâm của đĩa có vận tốc V_A, thì :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{1}{R}a^\tau_A \qquad (8\text{-}10)$$

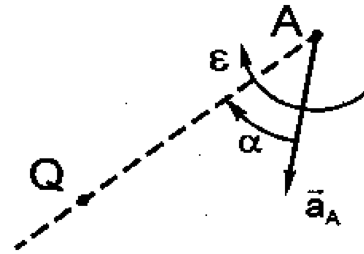
2. Trong trường hợp biết gia tốc một điểm ($\vec{a}_A$), vận tốc góc $\bar{\omega}$ và gia tốc góc $\bar{\varepsilon}$ của hình phẳng, thì tâm gia tốc tức thời Q sẽ nằm trên nửa đường thẳng AQ có được bằng cách quay véc tơ $\vec{a}_A$ theo chiều $\bar{\varepsilon}$

một góc α ($tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$) theo chiều $\bar{\varepsilon}$ (Hình 8-12)

và cách A một đoạn : $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$



Hình 8-11



Hình 8-12

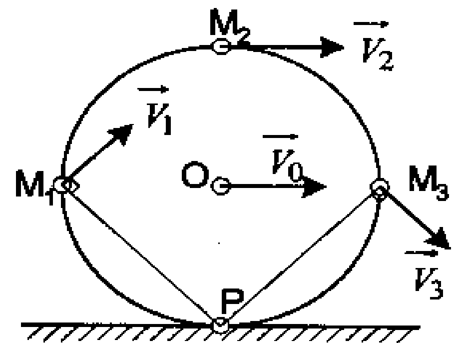
Ví dụ 8-1:

Bánh xe lăn không trượt trên đường thẳng nằm ngang. Tại thời điểm khảo sát tâm bánh xe có vận tốc V_O = 1m/s, gia tốc $a_O = 3m/s^2$, bán kính R = 0,5m (Hình 8-13).

- Xác định vận tốc các điểm M_1, M_2, M_3 trên vành.
- Xác định gia tốc điểm M_1.

Giải

Bánh xe lăn không trượt nên tâm vận tốc tức thời là điểm tiếp xúc giữa bánh xe và mặt đường (P). Vận tốc góc tức thời của bánh xe là:



Hình 8-13

$$\omega = \frac{V_0}{PO} = \frac{V_0}{R} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ m/s}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_0}{R} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ rad/s}^2$$

Khoảng cách từ tâm vận tốc tức thời đến các điểm M_1, M_2, M_3 là :

$$PM_1 = PM_3 = 0,5\sqrt{2}\,(m) \; ; \quad PM_2 = 2.R = 1(m)$$

Vận tốc các điểm M_1, M_2, M_3 có hướng như trên hình vẽ và có trị số là :

$$V_{M1} = V_{M3} = \omega.PM_1 = 2.0,5\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \text{m/s}$$

$$V_{M2} = \omega.PM_2 = 2.1 = 2 \text{ m/s}$$

Gia tốc điểm M_1 : $\vec{a}_{M_1} = \vec{a}_O + \vec{a}^\tau_{M_1O} + \vec{a}^n_{M_1O}$

Trong đó :

$a^\tau_{M_1O} = R.\varepsilon = a_0$ hướng vuông góc với OM_1, còn $a^n_{M_1O} = R\omega^2 = \frac{V_0^2}{R}$

hướng từ M_1 vào O, chúng ta có:

$$a_{M_1} = \sqrt{(a_0 + a^n_{M_1O})^2 + (a^\tau_{M_1O})^2} = \sqrt{(a_0 + \frac{V_0^2}{R})^2 + (a_0)^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83 m/s^2$$

Ví dụ 8-2 :

Cho cơ cấu ba thanh OA, AB, CB nối bản lề tại O; A; B, C. Cho OA quay đều với vận tốc góc ω = 4rad/s. Cho OA = r ; AB = 2r ; BC = $r\sqrt{2}$. Tại vị trí như hình vẽ có góc $\hat{A} = 90^0$ và góc $\hat{B} = 45^0$, r = 0,5m (Hình 8-14).
Xác định vận tốc điểm B; vận tốc góc của thanh AB và BC, gia tốc của điểm A.

Giải :

Vì OA quay quanh O nên có :

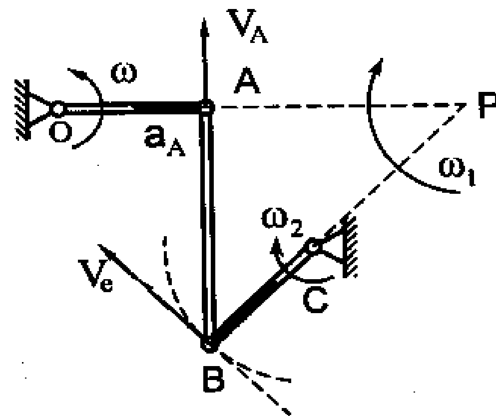
$\vec{V}_A \perp OA$ và

$V_A = OA.\omega = r.\omega = 0{,}5.4 = 2 m/s$.

Vì BC quay quanh C nên $\vec{V}_C \perp BC$.

Thanh AB chuyển động song phẳng, vận tốc hai điểm A và B đều biết nên ta suy ra vị trí tâm vận tốc tức thời P như hình vẽ và có:

$$V_A = PA.\omega_{BA} ; \ V_B = PB.\omega_{BA}$$



Hình 8-14

suy ra :

$$\omega_{BA} = \frac{V_A}{PA} = \frac{2}{2r} = 2 rad/s$$

$$V_B = 2\sqrt{2}.r.\omega_{AB} = 2\sqrt{2} m/s$$

Nếu coi B thuộc thanh BC quay quanh tâm C, chúng ta có :

$$V_B = CB.\omega_{BC}$$

nên $\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC} = \frac{2\sqrt{2}}{0{,}5\sqrt{2}} = 4 rad/s$

Vì điểm A thuộc thanh OA chuyển động tròn đều quanh O nên :

$$\vec{a}_A = \vec{a}^n_A$$

$$a_A = OA.\omega^2 = 0{,}5.4^2 = 8 \ m/s^2$$

8.4.Bài tập chương 8

8.1. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0 = 2,5rad/s quanh trục O của bánh khía cố định. Tay quay OA truyền chuyển động cho bánh khía động lắp ở đầu A. Cho r_1 = 5cm ; r_2 = 15cm.
Xác định trị số và hướng vận tốc các điểm A, B, C, D và E của bánh

khía động nếu CE ⊥ BD (Hình 8-15).

ĐS : $V_A = 50cm/s$; $V_B = 0$; $V_D = 100cm/s$; $V_C = V_E = 70,7cm/s$.

8.2. Hai thước song song cùng chuyển động về một phía với các vận tốc không đổi $V_1 = 6m/s$ và $V_2 = 2m/s$. Giữa các thước người ta đặt đĩa tròn bán kính R = 0,5m, đĩa lăn không trượt theo các thước.

Tìm vận tốc góc và vận tốc của tâm đĩa (Hình 8-16).

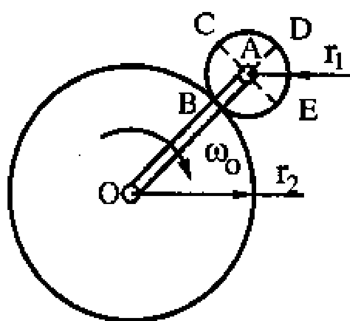
ĐS : $\omega = 4rad/s$ và $V_0 = 4m/s$.

8.3. Con lăn hai tầng bán kính R = 2r = 20cm lăn không trượt trên mặt phẳng ngang tầng trong được cuốn dây và buộc vào vật M.

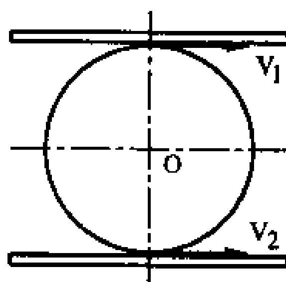
Tìm gia tốc điểm cao nhất A lúc t = 1s khi vật M rơi xuống với vận tốc v = 3t m/s (Hình 8-17).

ĐS : $a_A = 4\sqrt{26} m/s^2$;

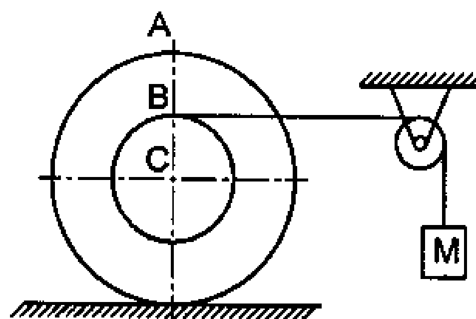
$\vec{a}_A$ *tạo với đường thẳng đứng một góc β có* $\cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{20}}$



Hình 8-15



Hình 8-16



Hình 8-17

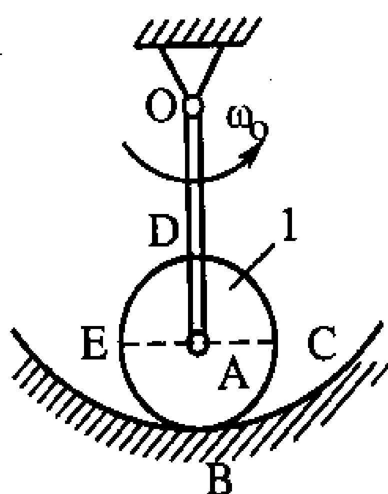
8.4. Cơ cấu hành tinh có tay quay OA quay với vận tốc góc ω_0 = const làm cho bánh 1 bán kính r lăn không trượt theo vành trong của bánh cố định bán kính R = 3r. Tìm vận tốc các điểm C, D, E thuộc bánh 1 và gia tốc các điểm B, C. Cho BD ⊥ CE (Hình 8-18).

ĐS : $V_C = V_E = 2r\sqrt{2}\,\omega_0$; $V_D = 4r\omega_0$; $a_B = 6r\omega_0^2$; $a_C = 2r\sqrt{5}\,\omega_0^2$;

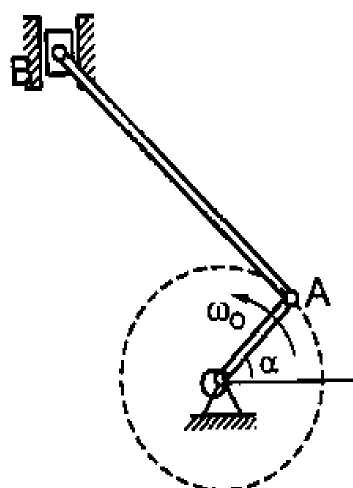
8.5. Tay quay OA dài 20cm, quay đều với vận tốc góc ω_0 = 10rad/s; thanh truyền AB dài 100cm, con chạy B chuyển động theo phương thẳng đứng.

Tìm vận tốc góc của thanh truyền và gia tốc con chạy B tại thời điểm tay quay và thanh truyền ⊥ với nhau, góc $\alpha = 45^0$ (Hình 8-19).

ĐS : $\omega_{AB} = 2rad/s$; $\varepsilon_{AB} = 16rad/s^2$; $a_B = 565,6cm/s^2$



Hình 8-18



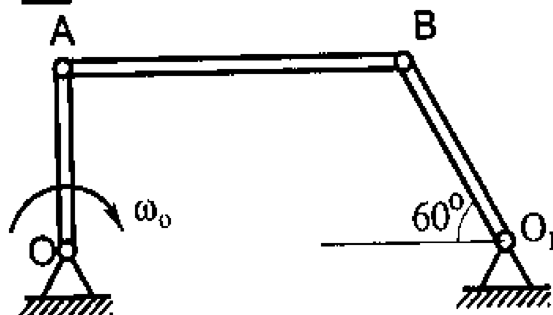
Hình 8-19

8.6. Tay quay OA = 0,2m quay đều với vận tốc góc ω_0 = 20rad/s, thanh truyền AB = 0,4m. Tìm vận tốc điểm B, vận tốc góc thanh truyền AB và cần lắc O_1B khi cơ cấu có vị trí như hình 8-20

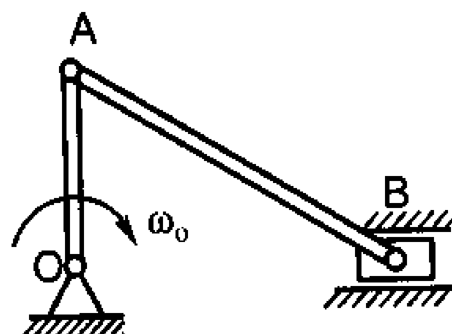
<u>ĐS</u> : $V_B = 4,61m/s$; $\omega_{AB} = 5,77rad/s$; $\omega_{O_1B} == 19,96rad/s$

8.7. Tay quay OA dài 30cm, quay đều với vận tốc góc ω_0 = 2rad/s, thanh truyền AB dài 50cm, con chạy B chuyển động theo phương ngang. Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của thanh truyền AB và gia tốc của con chạy B tại thời điểm tay quay thẳng đứng (Hình 8-21).

<u>ĐS</u> : $\omega_{AB} = 0$; $\varepsilon_{AB} = 3rad/s^2$; $a_B = 90cm/s^2$



Hình 8-20



Hình 8-21

PHẦN III

ĐỘNG LỰC HỌC

CHƯƠNG 9
ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM VÀ VẬT RẮN

Yêu cầu :

* Thấy được cơ sở lý thuyết của động lực học là các tiên đề. Nắm vững nội dung và tác dụng của từng tiên đề.
* Mọi bài toán động lực học đều quy về hai bài toán cơ bản, nắm chắc phương pháp giải hai bài toán đó.

9.1. Hệ tiên đề động lực học (các định luật cơ bản của động lực học)

9.1.1. Tiên đề 1 (Định luật quán tính)

Nếu không có lực nào tác dụng lên chất điểm thì chất điểm sẽ nằm yên hay chuyển động thẳng đều.

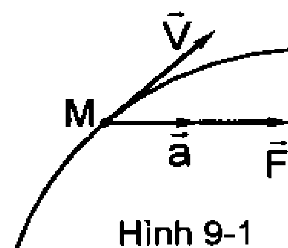
Trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều của chất điểm được gọi là chuyển động theo quán tính.

Như vậy, nếu không chịu tác dụng, vận tốc chất điểm sẽ không đổi cả về độ lớn và hướng và do đó gia tốc của nó bằng không. Nói một cách khác, lực là nguyên nhân làm thay đổi chuyển động thẳng đều của chất điểm, lực tác động vào chất điểm làm cho nó có một gia tốc. Liên hệ giữa lực và gia tốc thể hiện trong định luật 2.

9.1.2. Tiên đề 2 (Định luật cơ bản của động lực học)

Lực tác dụng lên một chất điểm có phương và chiều trùng với phương, chiều của gia tốc, có trị số bằng tích giữa khối lượng của chất điểm và trị số của gia tốc (Hình 9-1)

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (9\text{-}1)$$



Hình 9-1

trong đó m là khối lượng chất điểm (kG).

Biểu thức (9-1) được gọi là phương trình cơ bản của động lực học. Từ phương (9-1) ta suy ra mối quan hệ giữa trọng lực $\vec{P}$ của vật và gia tốc trọng trường $\vec{g}$:

$$P = mg \qquad (9\text{-}2)$$

9.1.3. Tiên đề 3 (Định luật về tính độc lập giữa tác dụng các lực)

Dưới tác dụng đồng thời của nhiều lực, chất điểm có gia tốc bằng tổng hình học các gia tốc mà chất điểm có được khi mỗi lực tác dụng riêng biệt.

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{a}_k \qquad (9\text{-}3)$$

Từ phương trình trên khi nhân cả 2 vế với m và chú ý đến tiên đề 2, ta có:

$$m\vec{a} = \sum m\vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} F_k \qquad (9\text{-}4)$$

(9-4) là phương trình cơ bản của động lực học chất điểm dưới tác dụng của hệ lực.

9.1.4. Tiên đề 4 (Định luật tác dụng và phản tác dụng)

Các lực mà hai chất điểm tác dụng tương hỗ bao giờ cũng bằng nhau về trị số, cùng đường tác dụng và ngược chiều nhau.

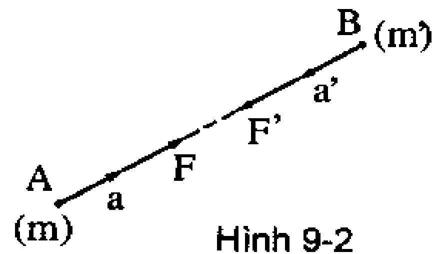
Như vậy nếu chất điểm B tác dụng lên chất điểm A một lực $\vec{F}$ (Hình 9-2) thì ngược lại chất điểm A cũng sẽ tác dụng lên chất điểm B một lực $\vec{F}'$ bằng nhau và ngược chiều với lực $\vec{F}$.

$$\vec{F} = -\vec{F}' \qquad (9\text{-}5)$$

Nếu gọi m và m' là khối lượng của hai chất điểm A và B, a và a' là trị số các gia tốc tương ứng của chúng ta có :

$$F = ma\ ; \quad F' = m'a'$$

Suy ra
$$\frac{a}{a'} = \frac{m'}{m} \qquad (9\text{-}6)$$



Hình 9-2

Vậy : *Gia tốc mà các chất điểm truyền cho nhau tỷ lệ nghịch với khối lượng của chúng.*

9.2. Hai bài toán cơ bản của động lực học

9.2.1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

a) Dạng toạ độ Đê-các

$$\sum F_{kx} = m\ddot{x}\ ; \quad \sum F_{ky} = m\ddot{y}\ ; \quad \sum F_{kz} = m\ddot{z} \qquad (9\text{-}7)$$

b) Dạng toạ độ tự nhiên: quỹ đạo phẳng

$$\sum F_k^{\tau} = ma_{\tau} \quad ; \quad \sum F_k^{n} = ma_n \qquad (9\text{-}8)$$

9.2.2. Hai bài toán cơ bản của động lực học

a) Bài toán thuận

Cho biết chuyển động của chất điểm, hãy xác định lực tác dụng lên chất điểm đó.

Ví dụ 9-1:

Một vật có khối lượng 2kG chuyển động trong mặt phẳng theo phương trình :

$x = 3t^2$
$y = 4t^2$ (x và y tính bằng mét, t tính bằng giây)

Xác định lực $\vec{F}$ (trị số và phương) tác dụng lên vật.

Giải :

Coi vật như một chất điểm, vì phương trình chuyển động cho dưới dạng tọa độ nên hình chiếu của gia tốc được xác định :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 6m/s^2; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt} = 8m/s^2$$

Áp dụng phương trình (9-7) có :

$F_x = ma_x = 2.6 = 12N; \quad F_y = ma_y = 2.8 = 16N$

Lực $\vec{F}$ có trị số : $F = \sqrt{F_x^2 + F_y} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20N$

Về phương : $\cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F} = \frac{12}{20} = 0,6$;

$\vec{F}$ hợp với phương x một góc gần bằng $53^0 10'$.

b) Bài toán nghịch

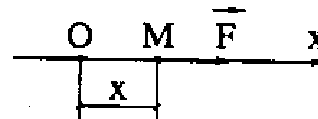
Cho biết các lực tác dụng lên chất điểm và các điều kiện đầu của chuyển động. Hãy xác định chuyển động của chất điểm.

Ví dụ 9-2 :

Một chất điểm khối lượng m, chuyển động thẳng dưới tác dụng của lực thay đổi theo quy luật $F = F_0 \cos\omega t$, trong đó F_0 và ω là những hằng số. Ở thời điểm đầu điểm có vận tốc v_0. Tìm phương trình chuyển động của điểm.

Giải :

Lấy trục Ox là đường thẳng, chất điểm chuyển động có gốc tại vị trí ban đầu của chất điểm (Hình 9-3). Chất điểm tự do chịu tác dụng của lực $\vec{F}$ nằm trên trục x. Theo (9-7) chúng ta có :



Hình 9-3

$$m\ddot{x} = F = F_0 \cos\omega t \quad (1)$$

Và theo đầu bài có điều kiện đầu của chuyển động t = 0, thì

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (2)$$

$$x(0) = 0 \quad (3)$$

Tích phân phương trình vi phân (1), chúng ta được :

$$\dot{x} = -\frac{F}{m\omega}\sin\omega t + C_1$$

Sử dụng điều kiện đầu (2) ta xác định được $C_1 = v_0$. Tích phân tiếp chúng ta được :

$$x = \frac{F}{m\omega^2}\cos\omega t + v_0 t + C_2$$

Theo điều kiện đầu (3) ta thu được $C_2 = \frac{F}{m\omega^2}$

Vậy phương trình chuyển động của chất điểm là :

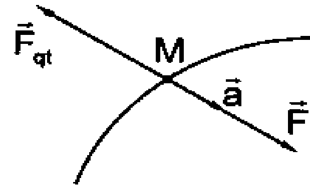
$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + v_0 t$$

9.3. Lực quán tính, nguyên lý Đa-lăm-be

9.3.1. Lực quán tính

Lực quán tính của chất điểm là đại lượng véctơ bằng tích khối lượng chất điểm với gia tốc của nó lấy với hướng ngược lại (Hình 9-4).

$$\vec{F}_{qt} = -m\vec{a} \qquad (9\text{-}9)$$

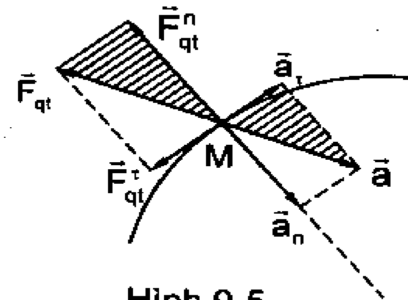


Hình 9-4

Nhận xét :

1.Vì $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ nên lực quán tính cũng gồm hai thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến (Hình 9-5) :

$$\vec{F}^{qt} = \vec{F}_\tau^{qt} + \vec{F}_n^{qt} \qquad (9\text{-}10)$$



Hình 9-5

trong đó:

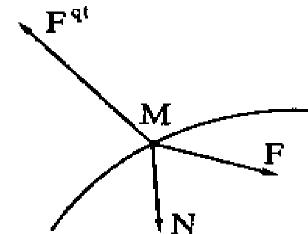
$$F_\tau^{qt} = ma_\tau = m\ddot{s} = m\dot{v}; \quad F_n^{qt} = ma_n = \frac{m\dot{s}^2}{\rho} = \frac{mv^2}{\rho} \qquad (9\text{-}11)$$

2. Lực quán tính không phải là lực thực sự tác dụng lên chất điểm. Nhưng nhờ khái niệm cơ học này, từ (9-9) ta có thể viết dưới dạng :
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n + \vec{F}_{qt} = 0$
mà theo tĩnh học, hệ lực đồng quy này cân bằng. Vậy ta có nguyên lý sau đây :

9.3.2. Nguyên lý Đa-lăm-be.

Ở mỗi thời điểm đã cho, nếu ta đặt vào chất điểm chuyển động lực quán tính của nó thì hệ lực gồm các lực tác dụng và lực quán tính sẽ cân bằng.

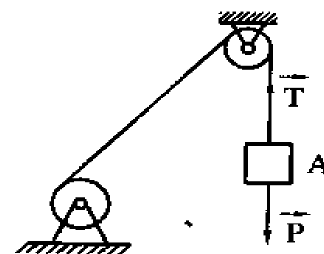
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n, \vec{F}_{qt}) \equiv 0 \qquad (9\text{-}12)$$



Hình 9-6

Trường hợp chất điểm chuyển động bị liên kết (Hình 9-6) thì lực tác dụng gồm lực cho và các phản lực liên kết khi đó hệ lực cân bằng gồm: các lực cho, các phản lực liên kết và lực quán tính và (9-12) có thể viết :

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n, \vec{N}, \vec{F}_{qt}) \equiv 0 \qquad (9\text{-}13)$$



Hình 9-7

Nguyên lý Đa-lăm-be cho phép chúng ta dùng các phương trình cân bằng tĩnh học để giải các bài toán chuyển động của chất điểm (có thể áp dụng cho cả vật rắn) tức là có thể đưa bài toán

động lực học về bài toán tĩnh học quen thuộc. Phương pháp giải bài toán động lực học như thế gọi là phương pháp tĩnh động.

Ví dụ 9-3 :

Tìm sức căng sợi dây khi kéo vật nặng P đi lên với gia tốc a (Hình 9-7)

Giải : Xét vật nặng như một chất điểm tự do chuyển động dưới tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ và sức căng của dây $\vec{T}$. Theo (9-13) ta có : $(\vec{P},\vec{T},\vec{F}_{qt}) \equiv 0$

Suy ra : $\sum F_{kz} = T - P - F_{qt} = 0$

Vậy $T = P + F_{qt} = P + P\frac{a}{g} = P(1+\frac{a}{g})$

Nhận xét : Sức căng T gồm sức căng tĩnh $T_t = P$ và sức căng động $T_d = P\frac{a}{g}$ gây ra do lực quán tính.

9.4. Động lực học vật rắn

9.4.1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

Giả sử có vật rắn chuyển động tịnh tiến. Như đã biết, mọi điểm của vật đều chuyển động như nhau nên để xét chuyển động của vật chúng ta chỉ cần tìm chuyển động trọng tâm của nó là đủ. Bài toán xét chuyển động của vật tịnh tiến như vậy trở thành bài toán xác định chuyển động của điểm.

Khi xét chuyển động trọng tâm ta cần xem như khối lượng toàn vật đều tập trung vào trọng tâm và các ngoại lực đều đặt vào đó. Việc xét chuyển động trọng tâm đã giải quyết ở phần chuyển động của điểm.

9.4.2. Chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định.

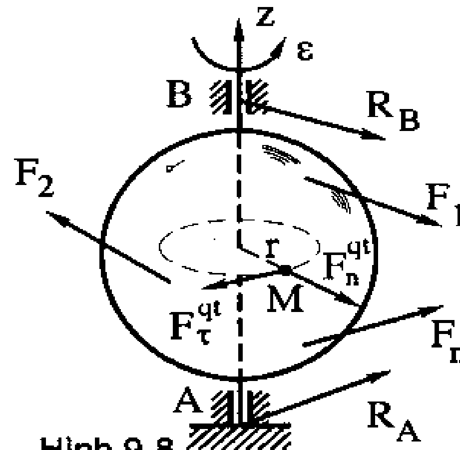
a) Phương trình cơ bản.

Giả sử có vật rắn quay quanh một trục cố định dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n$ (Hình 9-8). Đặt vào vật các phản lực tại A , B và các lực quán tính; theo nguyên lý Đa-lăm-be các lực tác dụng, phản lực và lực quán tính của vật cân bằng nhau.

Chúng ta có phương trình cơ bản động lực học vật quay:

$M_z = J_z \varepsilon$ (9-14)

Trong đó: M_z tổng đại số mômen của các ngoại lực tác dụng lên vật đối với trục quay z.



Hình 9-8

J_z - mômen quán tính của vật đối với trục quay z (kGm^2).

b) Mômen quán tính của một số vật đồng chất

Tên	Hình dạng	Công thức
Thanh đồng chất	z, z_1, $l/2$, l	$J_z = \frac{M.l^2}{3}$ $J_{z1} = \frac{M.l^2}{12}$
Tấm phẳng hình chữ nhật đồng chất	z, z_1, $b/2$, $b/2$	$J_z = \frac{M.b^2}{3}$ $J_{z1} = \frac{M.b^2}{12}$
Vòng tròn đồng chất	z, R	$J_z = M.R^2$
Tấm tròn đồng chất	z, R	$J_z = \frac{M.R^2}{2}$

Ví dụ 9-4.

Cần tác dụng một mômen quay bằng bao nhiêu vào một vô lăng để sau 20 giây vô lăng có vận tốc góc 180vg/ph. Biết rằng vô lăng có khối lượng 300kG đường kính D = 1,4m, khối lượng tập trung ở vành và ma sát ở trục bỏ qua (Hình 9-9).

Giải :

Mômen tác dụng lên vô lăng xác định theo công thức :

$$M_z = J_z\varepsilon$$

Theo đầu bài, vật có khối lượng tập trung ở vành ngoài, như vậy :

$$J_z = MR^2 = 300.0,7^2 = 147 \text{ kGm}^2$$

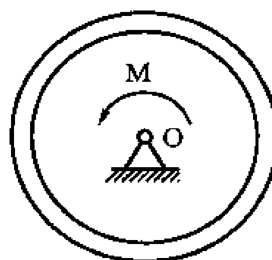
$$\omega = \frac{\pi.n}{30} = \frac{\pi.180}{30} = 6\pi = 18{,}84 \text{rad}/$$

Vô lăng quay nhanh dần đều, do đó :

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{18{,}84}{20} = 0{,}94 \text{rad}/\text{s}^2$$

Chúng ta tính được :

$$M_z = J_z\varepsilon = 147.0{,}94 = 138 \text{Nm}$$



Hình 9-9

Ví dụ 9-5.

Một bánh xe khối lượng m = 3kG chuyển động nhờ dây cua-roa nối liền với động cơ. Sức căng của các nhánh dây là T_1 = 101N và T_2 = 50,5N. Tìm vận tốc góc của bánh xe sau 10 vòng, cho biết bánh xe có bán kính 20cm, khối lượng phân bố đều và mômen cản ở trục là 10Nm (Hình 9-10).

Giải :

Lực tác dụng lên bánh xe gồm lực căng các nhánh dây, và ma sát ổ trục, như vậy :

$$M_z = T_1.r - T_2.r - M_C = 101.0{,}2 - 50{,}5.0{,}2 - 10 = 0{,}1 \text{Nm}$$

Mômen quán tính của bánh xe :

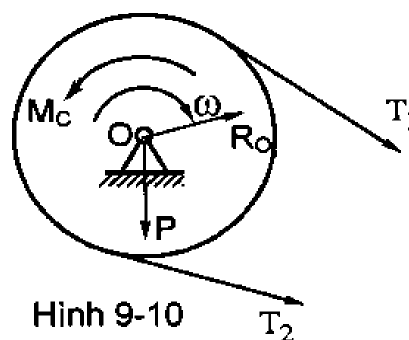
$$J_z = \frac{MR^2}{2} = \frac{3.0{,}2^2}{2} = 0{,}06 \text{ kGm}^2$$

Gia tốc góc của bánh xe

$$\varepsilon = \frac{M_z}{J_z} = \frac{0{,}1}{0{,}06} \approx 1{,}7 \text{rad}/\text{s}^2$$

Bánh xe quay nhanh dần đều, ta có :

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$$



Hình 9-10

Khi quay được 10 vòng : $2\pi.10 = \frac{\varepsilon t^2}{2} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{10\pi}{\varepsilon}}$

Vận tốc góc của bánh xe lúc đó là :

$$\omega = \varepsilon t = 2\sqrt{10\pi.\varepsilon} = 2\sqrt{53{,}38} \approx 14{,}6 \text{rad}/\text{s}$$

9.5. Bài tập chương 9

9.1. Một ô tô chở hàng có khối lượng 6 tấn chạy xuống một chiếc phà với tốc độ 21,6km/giờ. Từ lúc bắt đầu xuống phà đến lúc dừng hẳn xe phải chạy thêm một quãng là 10m, cho rằng khi ấy ô tô chuyển động chậm dần đều. Tính lực căng mỗi dây cáp (hai dây cáp) buộc giữ phà, coi như dây cáp luôn luôn căng.

<u>ĐS:</u> *T = 5400 N*

9.2. Một xe goòng có khối lượng là 700kG đang chạy xuống dốc dọc theo đường ray thẳng và nghiêng với mặt ngang một góc 15^0. Để giữ cho xe chạy đều ta dùng dây cáp song song với mặt dốc. Vận tốc chạy đề của xe là 1,6m/s. Xác định lực căng của dây cáp lúc xe chạy đều và khi nó bị hãm dừng lại trong 4 giây. Hệ số cản chuyển động tổng cộng là f = 0,015, và lúc hãm coi rằng xe chạy chậm dần đều.

ĐS: $T_1 = 1677,7\,N$, $T_2 = 1957,7\,N$

9.3. Vật nặng P = 600N được kéo lên theo đường dốc nghiêng với mặt nằm ngang góc $\alpha = 30^0$ bởi lực kéo $\bar{Q}$ có trị số 400N và nghiêng với phương chuyển động của vật góc $\beta = 30^0$. Hệ số ma sát trượt động giữa vật với mặt nghiêng $f' = 0,1$. Nếu chiều dài dốc là 12m và vật bắt đầu được kéo lên từ chân dốc thì cần bao nhiêu thời gian để vật lên đến đỉnh dốc ? (Hình 9-11).

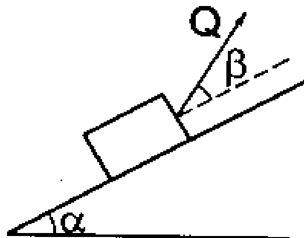
ĐS: $t = 10s$

9.4. Một tời cất vật nặng B trọng lượng 20 kN đặt lên dầm, dầm dựa lên các giá C và D; CD = 8m, AC = 3m. Vật nặng B được nâng lên nhanh dần với gia tốc $0,5m/s^2$. Tìm áp lực phụ lên gối C và D do lực quán tính của vật nặng (Hình 9-12).

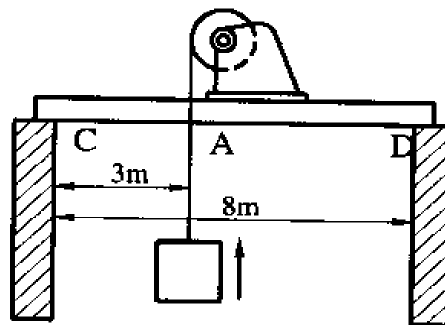
ĐS: $P_C = 382,3N$; $P_D = 637,1N$

9.5. Một bánh xe khối lượng m = 196 kG đang quay với vận tốc góc n = 240 vg/ph thì được hãm lại, lực hãm N = 200N. Hệ số ma sát giữa phanh hãm và bánh xe là f = 0,3. Tìm thời gian từ lúc hãm đến lúc bánh xe dừng lại hẳn. Bán kính bánh xe là R = 20cm (Hình 9-13).

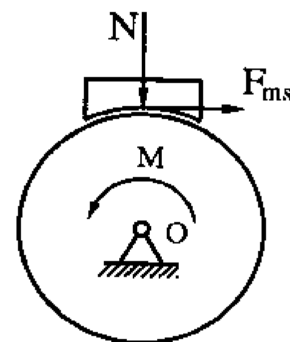
ĐS: $t = 8,2\,s$



Hình 9-11



Hình 9-12



Hình 9-13

9.6. Xác định lực tiếp tuyến trung bình cần đặt vào tay quay dài L = 0,3m để cho sau 15 vòng quay bánh xe đạt được vận tốc góc ứng với n = 180vg/ph. Cho biết bánh xe có khối lượng m = 392,5kG và bán kính quán tính $\rho = 50cm$.

ĐS: $P = 616,23\,N$

CHƯƠNG 10
CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Mục đích:
Hiểu rõ những định lý này để chúng ta sẽ thấy rõ hơn quan hệ khắng khít giữa lực và chuyển động, mặt khác trong các trường hợp cụ thể có thể giúp ta thêm những phương pháp giải quyết các bài toán động lực học một cách nhanh chóng và đơn giản.
Yêu cầu :
* Nắm vững định nghĩa và phương pháp xác định các tác dụng của hệ lực.
* Phân biệt các định lý, nhận rõ ý nghĩa và các trường hợp sử dụng.

10.1. Định lý động lượng
10.1.1. Các khái niệm
a) Động lượng

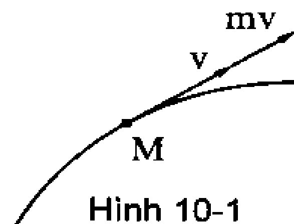
- Động lượng chất điểm : là đại lượng véc tơ, ký hiệu $\vec{q}$ bằng tích của khối lượng chất điểm và vận tốc của nó (Hình 10-1)

$$\vec{q} = m\vec{v} \qquad (10\text{-}1)$$

- Động lượng cơ hệ : bằng tổng động lượng của các chất điểm thuộc cơ hệ; ký hiệu $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_k = \sum m_k \vec{v}_k \qquad (10\text{-}2)$$

hay $$\vec{Q} = M\vec{v}_C \qquad (10\text{-}3)$$



Hình 10-1

Nhận xét: *Động lượng cơ hệ bằng động lượng của khối tâm mang khối lượng toàn hệ.*

b) Xung lượng của lực

- Xung lượng nguyên tố của lực $\vec{F}$, ký hiệu $d\vec{S}$ bằng tích của lực và thời gian vô cùng bé dt: $$d\vec{S} = \vec{F}.dt \qquad (10\text{-}4)$$

-Xung lượng hữu hạn của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian từ t_0 đến t_1

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}.dt \qquad (10\text{-}5)$$

Trong trường hợp lực không đổi theo thời gian $\vec{F} = \text{const}$ thì $\vec{S} = \vec{F}(t_1 - t_0)$

Đơn vị đo cơ bản của xung lượng là N.s

10.1.2. Định lý bảo toàn động lượng
Nếu tổng các ngoại lực (hoặc tổng hình chiếu các ngoại lực trên một trục) bằng không, thì động lượng cơ hệ (hoặc hình chiếu động lượng cơ hệ trên trục đó) được bảo toàn.

Nếu $\sum \vec{F}_k^e = 0$; thì $\vec{Q} = const$ (10-6)

Nếu $\sum F_{kx}^e = 0$; thì $Q_x = const$.

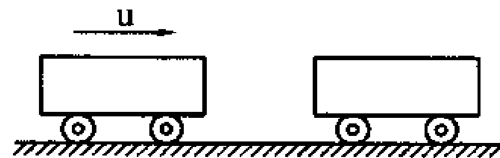
Định lý động lượng thường được áp dụng để xác định $\vec{v}$, t hay $\vec{F}$, áp dụng thuận tiện trong bài toán va chạm hay khảo sát chuyển động của chất lỏng.

Ví dụ 10-1:

Một toa tàu chạy với vận tốc u đến húc vào một toa tàu nằm yên đẩy nó cùng chuyển động. Xác định vận tốc các toa tàu sau lúc va chạm, giả thiết chúng cùng khối lượng (Hình 10-2).

Giải :

Ta khảo sát hệ gồm cả hai toa tàu. Ngoại lực tác dụng lên hệ là trọng lực các toa tàu và phản lực của đường ray. Do $\sum F_{kx}^e = 0$ nên động lượng hệ trên trục x bảo toàn : $Q_x = Q_{0x}$



Hình 10-2

sau khi hai toa cùng chuyển động như một vật, gọi vận tốc lúc đó là v ta có : $Q_x = Mv = 2mv$

Lúc đầu chỉ có một toa chuyển động với vận tốc u nên : $Q_{0x} = m.u$

Như vậy ta phải có : $2m.v = m.u$

$$\Rightarrow v = \frac{u}{2}$$

10.2. Định lý mômen động lượng

10.2.1. Mômen động lượng

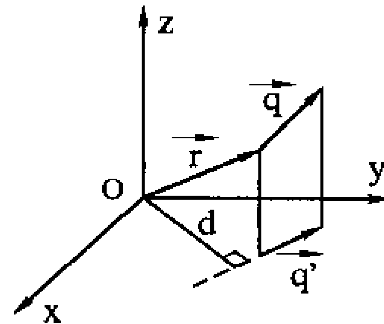
a) Mômen động lượng chất điểm

- Mômen động lượng chất điểm đối với tâm O là một véc tơ ký hiệu là $\vec{l}_O$:

$$\vec{l}_O = \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad (10\text{-}7)$$

- Mômen động lượng của chất điểm đối với một trục z là một lượng đại số, ký hiệu $\bar{l}_z$

$$\bar{l}_z = \overline{m}(\vec{q}) = \overline{m}(m\vec{v}) = \pm mv'd \quad (10\text{-}8)$$



Hình 10-3

Trong đó mv' là hình chiếu của véc tơ $m\vec{v}$ lên mặt phẳng xoy, d là khoảng cách từ O đến $\vec{q}'$. Dấu (+) được lấy khi $\vec{q}'$ quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ đối với người quan sát đứng theo chiều dương trục z (Hình 10-3)

Giữa hai khái niệm trên, ta có mối quan hệ :

$$l_z = hc_z \vec{l}_0 \quad (10\text{-}9)$$

b) Mômen động lượng cơ hệ

- Mômen động lượng của cơ hệ đối với tâm O bằng tổng các mômen động của các chất điểm của cơ hệ đối với O, ký hiệu $\vec{L}_0$ tức :

$$\vec{L}_O = \sum \vec{l}_{kO} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k \quad (10\text{-}10)$$

$$L_z = \sum l_{kz} = \sum m_z(m_k \vec{v}_k) \quad (10\text{-}11)$$

Rõ ràng chúng có quan hệ :

$$L_z = hc_z \vec{L}_O \quad (10\text{-}12)$$

-Mômen động lượng của vật rắn quay quanh trục cố định

$$L_z = J_z.\overline{\omega} \quad (10\text{-}13)$$

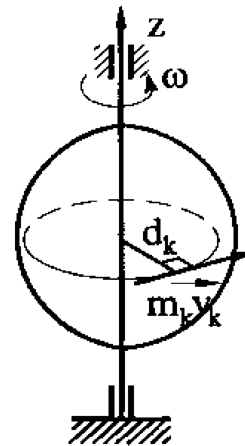
10.2.2. Định lý mômen động lượng

a) Định lý

Đạo hàm theo thời gian của mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm (hay một trục), bằng tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ lấy đối với tâm (hay trục) ấy (Hình 10-4).

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_{ke}) \quad (10\text{-}14)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_{ke}) \quad (10\text{-}15)$$



Hình 10-4

Nhận xét :

- *Theo (10-14), nội lực không ảnh hưởng tới sự thay đổi của mômen động lượng cơ hệ*

b) Định luật bảo toàn mômen động lượng

Nếu tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với một tâm (hoặc một trục) bằng không, thì mômen động của cơ hệ đối với tâm (hoặc một trục) ấy không đổi.

$$\text{Nếu } \sum \vec{m}_O(\vec{F}_{ke}) = 0 \text{ thì } \vec{L}_O = \text{const} \quad (10\text{-}16)$$

$$\text{Nếu } \sum m_z(\vec{F}_{ke}) = 0) \text{ thì } L_z = \text{const} \quad (10\text{-}17)$$

Trường hợp đặc biệt chất điểm chịu tác dụng của lực $\vec{F}$ luôn đi qua tâm O (lực xuyên tâm) thì $\vec{r} \times m\vec{v} = \text{const}$.

Ví dụ 10-2 :

Trên đĩa trọng lượng P, bán kính R đặt một xe con trọng lượng Q. Đĩa quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω_0. Tìm vận tốc góc của đĩa lúc xe chạy theo vành đĩa với vận tốc tương đối u (Hình 10-5).

Giải :

Chúng ta xét toàn bộ hệ gồm đĩa và xe. Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm

các trọng lực và phản lực ở trục quay.

Vì $M_{ez} = 0$ nên mômen động lượng của hệ bảo toàn :

$$\overline{L}_Z = \overline{L}_{Oz} = \overline{L}_{1z} + \overline{L}_{2z} \qquad (1)$$

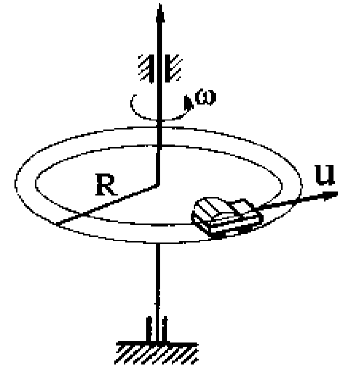
L_{1Z}, L_{2Z} là mômen động lượng của đĩa và xe.

Gọi vận tốc góc của đĩa lúc sau là ω, áp dụng công thức (10-13) chúng ta có :

$$\overline{L}_{1Z} = J_Z\omega = \frac{PR^2}{2g}\omega$$

Xe có thể xem là một chất điểm có vận tốc tuyệt đối v = u + Rω do đó :

$$\overline{L}_{2Z} = \overline{m}(m\overline{v}) = R.mv = \frac{Q}{g}R(u + R\omega)$$



Hình 10-5

Như vậy : $\overline{L}_Z = \dfrac{\omega R^2(P + 2Q) + 2QRu}{2g}$

Ứng với lúc đầu vì u = 0 và $\omega = \omega_0$ nên : $\overline{L}_{Oz} = \dfrac{\omega_0 R^2(P + 2Q)}{2g}$

Thay kết qủa trên vào (1) chúng ta giải ra : $\omega = \omega_0 - \dfrac{2Q}{(P + 2Q)R}u$

10.3. Định lý động năng

10.3.1. Công của lực

Công của lực $\vec{F}$ sinh ra trên đoạn đường vô cùng bé ds ta gọi là công nguyên tố của lực, được tính bằng :

$$dA = F.\cos\alpha.ds \qquad (10\text{-}18)$$

α là góc giữa phương của lực và phương di chuyển

Công thức tính công dạng toạ độ :

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (10\text{-}19)$$

Muốn tính công của lực trên một đoạn đường nào đó (từ M_0 đến M) ta cần tính tổng các nguyên tố, nghĩa là phải thực hiện phép tính tích phân:

$$A = \int_{M_0M} dA$$

- Công của các lực đặc biệt :

– Lực vuông góc với phương di chuyển : Ta có cosα = 0 và A = 0

– Lực nằm dọc theo đường đi : Lúc này cosα = ± 1, chúng ta có :

$$A = \pm\int_{S_0}^{S} F.ds. \qquad (10\text{-}20)$$

- Nếu lực có trị số không đổi thì công được tính :

$$A = \pm F.S \qquad (10\text{-}21)$$

- Công của trọng lực (Hình 10-6) :

$$A = -mg\int_{z_0}^{z} dz = -mg(z - z_0) = \pm mgh \qquad (10\text{-}22)$$

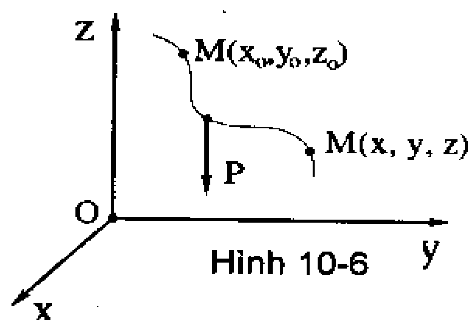
Biểu thức lấy dấu (+) khi vật chuyển động xuống, lấy dấu (-) khi vật chuyển động đi lên.

Công của trọng lực không phụ thuộc đoạn đường di chuyển mà chỉ phụ thuộc vào độ cao h

- Công của ngẫu lực có mômen M, góc quay φ :

$$A_M = M\varphi . \qquad (10\text{-}23)$$

Công có thứ nguyên : [lực].[độ dài] ; thường được tính bằng Nm (gọi là Jun)



Hình 10-6

10.3.2. Động năng

- Định nghĩa

– Động năng của chất điểm : là một đại lượng vô hướng bằng nửa tích số giữa khối lượng của chất điểm với bình phương vận tốc của nó

$$T_k = \frac{1}{2}m_k v_k^2 \qquad (10\text{-}24)$$

– Động năng cơ hệ : là tổng động năng các chất điểm thuộc hệ

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}m_k v_k^2 \qquad (10\text{-}25)$$

Đơn vị đo cơ bản của động năng là kgm^2/s^2 (hay Nm ; hay J trùng với đơn vị đo của công)

- Động năng của vật rắn trong một số chuyển động đặc biệt

– Vật rắn chuyển động tịnh tiến : $\vec{v}_k = \vec{v}_C$ (C là khối tâm của vật) nên :

$$T = \sum T_k = \frac{1}{2}\sum m_k v_C^2 = \frac{1}{2}(\sum m_k)v_C^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 \qquad (10\text{-}26)$$

– Vật rắn quay quanh trục cố định : Xét một điểm bất kỳ của vật, gọi r là khoảng cách từ điểm đó đến trục quay, ta có $v_k = r_k\omega$ do đó :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_k r_k^2\omega^2 = \frac{1}{2}(\sum m_k r_k^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J_Z\omega^2 \qquad (10\text{-}27)$$

– Vật rắn chuyển động song phẳng : Ta có thể xem đây là vật quay quanh trục tức thời đi qua tâm tức thời P chúng ta có :

$$T = J_{Pz}\frac{\omega^2}{2} = (J_{Cz} + M\rho^2)\frac{\omega^2}{2} \qquad (10-28)$$

hay
$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 \qquad (10-28')$$

trong đó : ρ là khoảng cách từ P đến khối tâm C và $v_C = \rho.\omega$

10.3.3. Định lý động năng

Biến thiên động năng của cơ hệ trên một đoạn chuyển dời nào đó bằng tổng công của các lực tác dụng lên cơ hệ trên đoạn chuyển dời đó.

$$T - T_0 = \Sigma A \qquad (10-29)$$

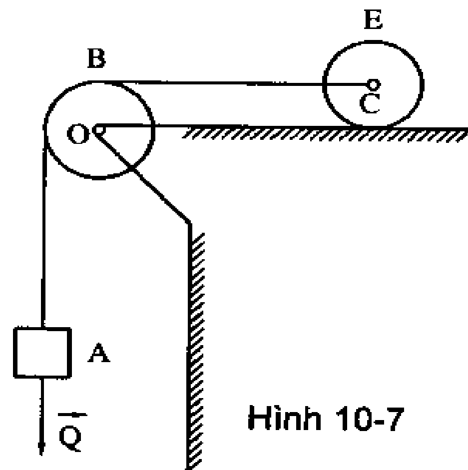
- Chú ý : Khi áp dụng định lý động năng, trên tổng quát ta phải tính cả công của nội lực; riêng trường hợp cơ hệ là một vật rắn hay là một hệ vật liên kết cứng với nhau thì lại có thể bỏ qua không để ý đến nội lực lúc tính công.

Định lý động năng là một định lý rất quan trọng, được áp dụng để tính lực, vận tốc và đường đi.

Ví dụ 10-3 :

Một vật có trọng lượng $\vec{Q}$ được buộc vào một sợi dây không giãn, không trọng lượng vắt qua một ròng rọc cố định B. Đầu kia của dây buộc vào trục con lăn E. Con lăn E lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang cố định. Ròng rọc B và con lăn E có cùng trọng lượng P, bán kính R và được coi là đĩa tròn đồng chất.

Tính động năng của hệ khi vật A rơi xuống với vận tốc V_A (Hình 10-7). Lúc đầu hệ đứng yên.



Hình 10-7

Giải :

- Cơ hệ gồm các vật A, B và E
- Phân tích chuyển động : Vật A chuyển động tịnh tiến, vật B chuyển động quay quanh trục cố định đi qua O. Vật E chuyển động song phẳng. Ta có động năng của hệ : $T = T_A + T_B + T_E$

$$T_A = \frac{1}{2}m_A V_A^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_A^2; \quad T_B = \frac{1}{2}J_0\omega_B^2$$

mà ta có
$$J_0 = \frac{1}{2}m_B R^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2 \text{ còn } \omega_B = \frac{V_A}{R}$$

nên
$$T_B = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\frac{V_A^2}{R^2} \text{ và } T_E = \frac{1}{2}J_C\omega_E^2 + \frac{1}{2}MV_C^2$$

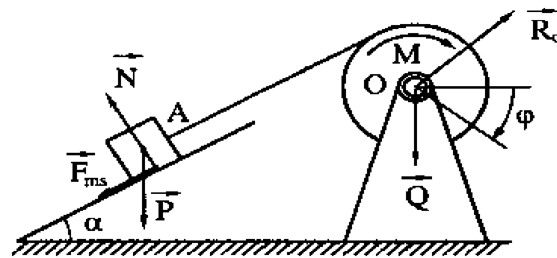
Vì dây không giãn nên $V_A = V_C$ và $\omega_E = \frac{V_A}{R}$

Cho nên $$T_E = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\frac{V_A^2}{R^2} + \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_A^2 = \frac{3}{4}\frac{P}{g}V_A^2$$

$$T = T_A + T_B + T_E = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_A^2 + \frac{1}{4}\frac{P}{g}V_A^2 + \frac{3}{4}\frac{P}{g}V_A^2 = \frac{(Q+2P)}{2P}V_A^2$$

Ví dụ 10-4 :

Tại đầu mút của một sợi dây quấn quanh tăm-bua của một trục tời buộc một vật trọng lượng P, để kéo vật lên theo mặt nghiêng có độ dốc α người ta đặt vào tăm-bua một mômen quay M. Tìm vận tốc góc của tăm-bua lúc nó quay được góc φ.



Hình 10-8

Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt nghiêng là f. Tăm-bua có bán kính R và trọng lượng Q. Khối lượng dây bỏ qua, tăm-bua xem như trụ tròn đồng chất. Ở thời điểm đầu hệ nằm yên, bỏ qua ma sát lăn (Hình 10-8).

Giải :

Cơ hệ gồm vật và tăm-bua. Ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lượng $\vec{P}, \vec{Q}$; ngẫu lực có mômen M và các phản lực liên kết $\vec{N}$ của mặt tựa, $\vec{R}_O$ của ổ đỡ, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ của mặt tựa lên vật.

Áp dụng (10-29) ta có : $T = T_1 + T_2$

T_1 là động năng của tăm-bua, T_2 là động năng của vật.

$$T_1 = \frac{Q}{g}\frac{R^2}{2}\frac{\omega^2}{2} = \frac{Q}{4g}R^2\omega^2 \quad ; \qquad T_2 = \frac{P}{g}\frac{V^2}{2} = \frac{P}{2g}R^2\omega^2$$

Như vậy : $$T = \frac{(Q+2P)}{4g}R^2\omega^2$$

$\vec{N}$ hướng vuông góc với phương dịch chuyển của điểm đặt ; $\vec{Q}$ và $\vec{R}_O$ có điểm đặt cố định nên đều không sinh công.

Như vậy : $$A = A_M + A_P + A_{Fms}$$

Trong đó $A_M = M\varphi$

Khi tăm-bua quay được góc φ thì vật di chuyển được một đoạn $s = R\varphi$, ta có :

$$A_P = -P.h = -P.\sin\alpha = -PR\varphi\sin\alpha\ ; \quad A_{Fms} = -F_{ms}.s = Pf\cos\alpha.R\varphi$$

Như vậy : $$A = [M - PR(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\varphi$$

Áp dụng định lý động năng cho cơ hệ : $T - T_0 = A$
Toàn hệ ban đầu đứng yên, $T_0 = 0$, ta có :

$$\frac{Q+2P}{4g}R^2\omega^2 = [M - PR(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\varphi$$

Từ đó tính được : $\omega = \frac{2}{R}\sqrt{g\frac{M - PR(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{Q+2P}\varphi}$

10.4. Bài tập chương 10

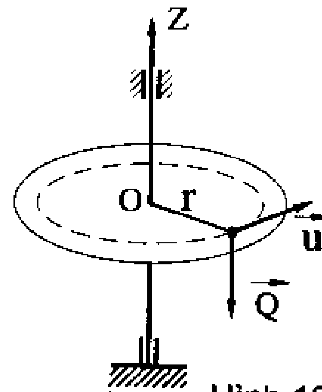
Định lý động lượng

10.1. Hệ số ma sát trượt giữa bánh xe ô tô và nền đường phải bằng bao nhiêu để ôtô đang có vận tốc V = 72 km/h dừng lại được sau khi bắt đầu hãm 6 giây.

<u>ĐS</u>: f = 0,339.

Định lý mômen động lượng

10.2. Một bàn tròn nằm ngang quay không ma sát xung quanh trục thẳng đứng Oz đi qua tâm O của nó. Một người trọng lượng Q đi trên bàn luôn luôn cách trục Oz một khoảng bằng r với vận tốc u không đổi (Hình 10-9). Hỏi khi đó bàn sẽ quay quanh trục Oz với vận tốc góc bằng bao nhiêu. Coi trọng lượng P của bàn phân bố đều trên diện tích hình tròn bán kính R. Tại thời điểm ban đầu bàn và người có vận tốc bằng không.



Hình 10-9

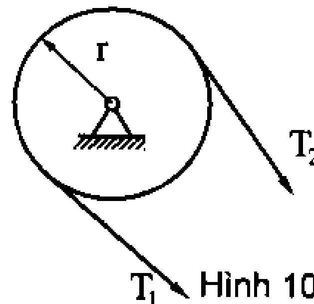
<u>ĐS</u>: $\omega = \frac{2Q.r.u}{Pr^2 + 2Qr^2}$

Định lý động năng

10.3. Một vật nặng trượt không vận tốc đầu theo mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = 30^0$ so với phương ngang, hệ số ma sát f = 0,1. Hỏi sau khi trượt xuống được đoạn s = 2m thì vận tốc v của vật bằng bao nhiêu ?

<u>ĐS</u>: v = 4,02 m/s

10.4. Sức căng của nhánh dẫn và nhánh bị dẫn của đai truyền làm quay bánh đai có bán kính r = 20 cm và trọng lượng P = 3,27N có giá trị tương ứng T_1 = 10,1N , T_2 = 5,05N (Hình 10-10). Mômen của lực cản phải bằng bao nhiêu để bánh đai quay với gia tốc góc ε = 1,5rad/s, coi bánh đai là đĩa tròn đồng chất.

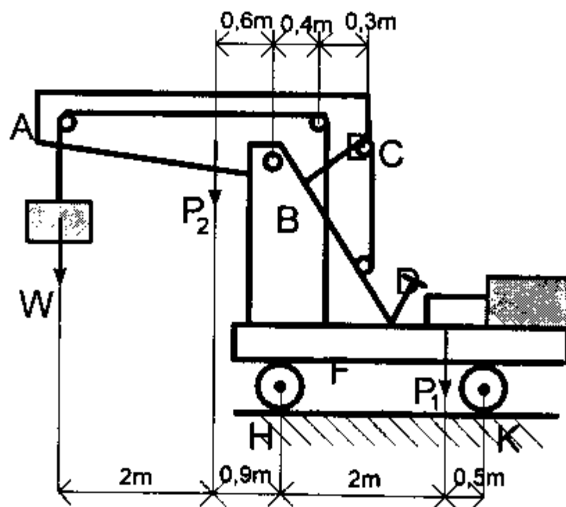


Hình 10-10

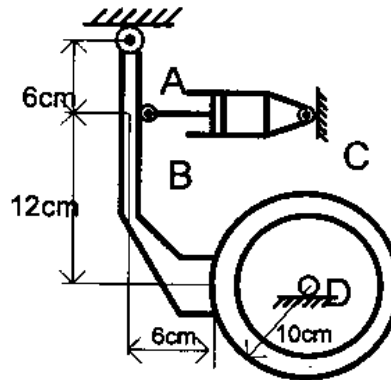
<u>ĐS</u>: M_C = 1Nm

TIỂU LUẬN

1. Xe cần cẩu (hình 1). Trọng lượng xe P_1 = 45 kN, trọng lượng cần ABC là P_2 = 2 kN, trọng lượng vật nâng W = 20 kN. Tìm lực liên kết của nền tại hai bánh trước H và hai bánh sau K.
2. Cơ cấu thắng (hình 2). Trên trục có mômen M quay ngược chiều kim đồng hồ. Tìm lực do piston đặt vào B để trục không quay. Hệ số ma sát tại má hãm f = 0,4.



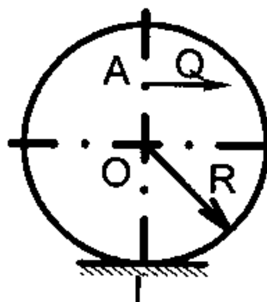
Hình 1



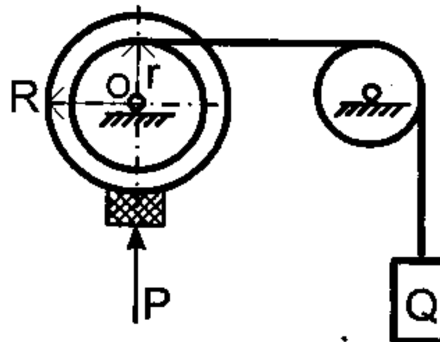
Hình 2

3. Trên mặt nằm ngang có bánh xe đồng chất tâm O trọng lượng P = 50N bán kính 80cm, chịu lực $\vec{Q}$ đặt tại A với IA = 3/2R, hệ số ma sát f = 0,4; k = 0,2cm (hình 3).

   Tìm trị số của $\vec{Q}$ để bánh xe lăn nhưng không trượt?
4. Hệ thống thắng gồm trục hai tầng, các bán kính r và R = 1,5r. Hệ số ma sát giữa thắng và trục là f = 0,4, vật có trọng lượng Q = 20 kN. Tìm lực P để thắng, bỏ qua ma sát ở ròng rọc (Hình 4).



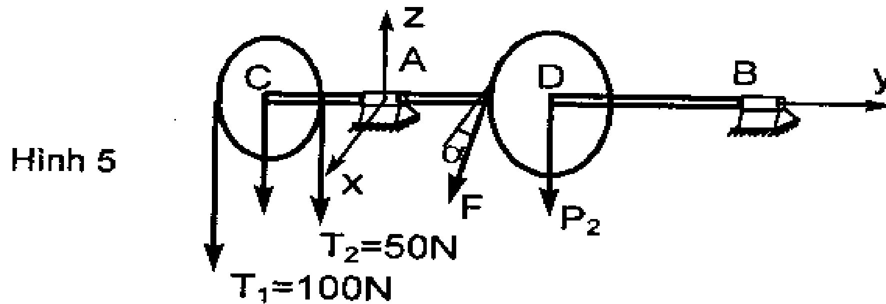
Hình 3



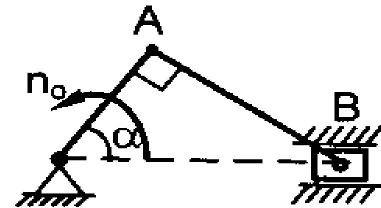
Hình 4

5. Trục nằm ngang lắp trên 2 ổ A và B. Tại C lắp bánh đai c lượng P_1 = 20N, bán kính R_1 = 40cm chuyển động nhờ 2 s đai T_1 và T_2, tại D lắp bánh răng trọng lượng P_2 = 50N, bán kí 30cm, lực tác dụng lên bánh răng F = 80N hợp với phương x AC = 20cm, AD = DB = 30cm (hình 5).
Tìm phản lực liên kết tại 2 ổ A và B?

Hình 5

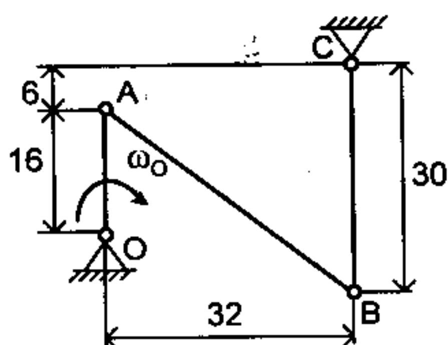


6. Giống như bài 2.19, nhưng đặt thêm tại B lực F = 40N nằm ngang hướng sang phải.
7. Giống như bài 2.21, trong đó a = 20cm. Tìm P để lực ép tại D là 2 tấn, phản lực tại O và C.
8. Giống như bài 2.22, trong đó R = 30cm, M = 50Nm. Tìm trị số lực Q để cơ cấu cân bằng, tìm phản lực liên kết tại O và C.

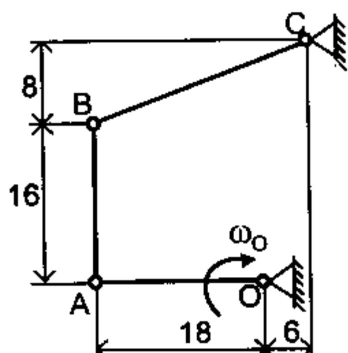


Hình 6

9. Tay quay OA dài 20cm, quay quanh O với vận tốc n_o = 300v/ph, công suất N = 3kW.
   a/ Tìm vận tốc và gia tốc con trượt B khi cơ cấu có sơ đồ theo hình 6, OA ⊥ AB.
   b/ Để cơ cấu cân bằng thì lực tác dụng vào con trượt B là bao nhiêu? Xét 2 trường hợp không có ma sát và có ma sát với f = 0,1.
10. Giống như bài 2.23, trong đó R = 30cm, d = 15cm. Tìm M để lực ép tại C là 1 tấn, phản lực tại O và D.
11. Giống như bài 8.1, trong đó ω_o = 2rad/s, $r_1 = 4r_2$ = 40cm; xác định thêm gia tốc của điểm B và E.
12. Giống như bài 8.1, trong đó ω_o = 2rad/s, $r_1 = 3r_2$ = 30cm; xác định thêm gia tốc của điểm B và E.
13. Giống như bài 8.4, trong đó ω_o = 2rad/s, R = 2r = 40cm.
14. Giống như bài 8.4, trong đó ω_o = 3rad/s, R = 3r = 30cm.
15. Giống như bài 8.7, trong đó ω_o = 3rad/s, AB = 2OA = 40cm.
16. Cơ cấu 4 khâu ở các vị trí hình 7. Thanh OA quay đều với vận tốc góc ω_o = 3 rad/s. Xác định vận tốc góc của thanh AB, BC và vận tốc của điểm B (các kích thước trên hình đo bằng cm).



Hình 7a



Hình 7b

NHÓM	BÀI SỐ			
1	1	bài 2.25,	bài 7.1, góc ABC = 30°	13
2	2	bài 2.24,	bài 7.2, $\varphi = t^2+5t$	16 hình 5a
3	5 , α = 30°	bài 3.7,	bài 7.3, góc OAB = 45°	12
4	9 , α = 30°	bài 4.2d,	bài 7.1, góc ABC = 60°	13
5	4	bài 4.2e,	bài 7.2, $\varphi = t^2+1$	16 hình 5b
6	6	bài 4.2g,	bài 7.3, góc OAB = 30°	10
7	8	bài 4.3a,	bài 7.3, góc OAB = 60°	11
8	5	bài 4.3b,	bài 7.4, $\varphi = 2t+1$	16 hình 5a
9	2	bài 4.3c,	bài 7.5, $x = t^2+2t$	bài 8.2
10	6	bài 6.4,	bài 7.4, $\varphi = t^2+1$	bài 8.5, α = 60°
11	5 , α = 60°	bài 6.5,	bài 7.4, $S_r = t^2+2t$	bài 8.3,
12	7 , α = 60°	bài 4.2b	bài 7.4, $S_r = t^2+5$	bài 8.6,
13	9 , α = 45°	bài 5.4	bài 7.2, $\varphi = t^2$	14
14	10	bài 5.3	bài 7.3, $S = t^2$	15
15	9 , α = 60°	bài 4.3c,	bài 7.2, $\varphi = t^2-2$	11

TỜ BÌA CỦA TIỂU LUẬN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM (14)
KHOA CƠ KHÍ (14)
BỘ MÔN CƠ SỞ THIẾT KẾ MÁY (14)

TIỂU LUẬN MÔN HỌC (22)
CƠ LÝ THUYẾT (28)

Lớp học phần : Nhóm :
Sinh viên thực hiện : MSSV :
Học kỳ : Năm học :
Giáo viên giảng dạy : (14)

Lưu ý :

- Trong tiểu luận của nhóm trưởng phải có danh sách của toàn bộ thành viên và biên bản họp nhóm đặt sau trang bìa,.
- Trình bày trên giấy A 4, một mặt, có chừa lề.
- Trên mỗi bài phải ghi lại toàn bộ các vấn đề được đặt ra kèm theo mô hình.
- Phần giải đều phải kèm theo sơ đồ lực rõ ràng hoặc họa đồ vận tốc, họa đồ gia tốc.
- Cuối mỗi bài phải có kết luận (kết quả), nhận xét.
- Mỗi cá nhân làm tiểu luận theo đề tài được giao cho nhóm, bấm lại (không cần bìa cứng). Khi nộp phải bó lại theo nhóm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Cơ học ứng dụng. Đỗ Sanh - Nguyễn Văn Vượng.
   Nhà xuất bản giáo dục 2002.
2. Giáo trình giản yếu cơ học lý thuyết. X.M.Targ.
   Dịch giả: Phạm Huyên.
   Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội - 1994.
3. Cơ học lý thuyết. Ninh Quang Hải.
   Nhà xuất bản Xây dựng. Hà Nội – 1997.
4. Cơ học lý thuyết. Trần Hữu Duẩn.
   NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp 1970.
5. Cơ học. Nguyễn Hữu Xý, Trương Quang Nghĩa, Nguyễn Văn Thỏa
   Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội - 1985.
6. Bài tập Cơ học ứng dụng.
   PGS.TS. Nguyễn Nhật Lệ - PGS.TS Nguyễn Văn Vượng
   Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội – 2001.
7. Tuyển tập bài tập cơ học kỹ thuật. N.M. Vđôrôp, A.G. Bexpankô
   Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội - 1980.

MỤC LỤC

Giáo trình

CƠ LÝ THUYẾT

(Dùng cho Hệ Cao đẳng)

KS. NGUYỄN THỊ ẨN

LƯU HÀNH NỘI BỘ

In tại Cty TNHH Một Thành Viên **IN KINH TẾ**
279 Nguyễn Tri Phương, Phường 5, Quận 10, Tp.HCM
ĐT: 08-39572423

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM

KHOA CÔNG NGHỆ CƠ KHÍ



SÁCH ĐÃ PHÁT HÀNH

Giáo trình Vật Liệu Cơ Khí
(ThS. Châu Minh Quang)

Giáo trình Anh Văn Cơ Khí
(Nguyễn Thị Mỹ Dung)

Giáo trình Dung Sai Lắp Ghép
(TS. Nguyễn Dần - KS. Nguyễn Hữu Thường)

Bài tập Vẽ Kỹ Thuật
(GV. Nguyễn Thị My)

Bảng phụ lục Dung Sai - Lắp Ghép
(KS. Nguyễn Hữu Thường)

Giáo trình Vẽ Kỹ Thuật
(GV. Nguyễn Thị My)

Giáo trình Sức Bền Vật Liệu
(KS. Nguyễn Thị Ẩn)

Mọi chi tiết xin liên hệ: Văn Phòng Khoa Cơ Khí, tầng trệt nhà V
12 Nguyễn Văn Bảo, P.4, Q. Gò Vấp, ĐT: 08.38940390 Ext. 201-202